

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

Dualidad en teorías de spin 2 masivo en dimensión 2+1

Dr. Pío J. Arias

Trabajo de ascenso presentado
ante la ilustre Universidad Central de Venezuela
para optar a la categoría de
Profesor Asociado

Caracas, 11 de febrero de 2005

Resumen

Dualidad en teorías de spin 2 masivo en dimensión 2+1

Dr. Pío J. Arias

Universidad Central de Venezuela

Se obtienen las ecuaciones que deben satisfacer los distintos campos que describen realizaciones del álgebra del grupo de Poincaré en dimensión 2+1, con masa m y spin entero (no cero). Para el caso de spin 2 se muestra que hay tres modelos posibles cuyas acciones se pueden conectar por transformaciones de dualidad. Estas transformaciones incorporan las invariancias de calibre que diferencian un modelo de otro. Se discute brevemente la relación entre las funciones de partición de estos modelos

A Pío José, Dafne y Zulay

Índice

1	Introducción	1
2	Ecuaciones de movimiento para partículas masivas con spin entero en $D = 2 + 1$	3
2.1	El grupo de Poincaré y sus generadores	3
2.2	Casimires	7
2.3	Realizaciones con $s=1$	7
2.4	Realizaciones con $s = 2$	8
2.5	Realizaciones con $s = n$, con n entero	10
3	Dualidad para teorías con spin 1	13
3.1	Los modelos como realizaciones del álgebra de Poincaré	13
3.2	Dualidad entre los modelos SD y TM	16
4	Dualidad para teorías de spin 2	21
4.1	Las acciones involucradas y su relación con la condición de Pauli-Lubanski	21
4.2	Dualidad $S_{SD} \longrightarrow S_{int}$	26
4.3	Dualidad $S_{int} \longrightarrow S_{TM}$	30
4.4	Conclusión	32
5	Conclusiones	35
A	Convenciones para gravedad curva y linealizada	37
A.1	Transformaciones bajo difeomorfismos	37
A.2	Derivadas covariantes, conexiones, tensores de Riemman, Ricci, Einstein, Cotton, Torsión	37
A.3	El lenguaje de las tríadas y los objetos asociados	39
A.4	Transformaciones de calibre en el lenguaje de las tríadas	41
A.5	Objetos involucrados y definiciones en la formulación linealizada	42
A.6	Transformaciones a nivel linealizado	43
A.7	Descomposición en partes irreducibles en la formulación linealizada	44

A.8	Tensores relevantes en función de solamente las componentes irreducibles de spin 2	46
Bibliografía		47

Capítulo 1

Introducción

El estudio de teorías vectoriales y tensoriales en dimensión 2+1 estuvo, inicialmente motivado por su conexión con el comportamiento de modelos, en 3+1 dimensiones, a altas temperaturas [1]. Sin embargo, en el correr del tiempo la física en esta dimensión espacio-temporal ha adquirido importancia propia dado que ha servido para aportar nuevas ideas a la física en 3+1 dimensiones.

Es en esta dimensión donde se introduce el término de teorías masivas topológicas, las cuales tienen la interesante propiedad de no explotar la invariancia de calibre [2]. Estos modelos masivos tienen en común que son sensibles a las transformaciones discretas de inversión temporal y de paridad, en concordancia con las particularidades que deben tener las representaciones del álgebra del grupo de Poincaré en esta dimensión.

También es propio de la teoría de campos en 2+1 dimensiones la aparición de los modelos masivos autoduales para teorías con spin 1, 2, 3 y 4 [3, 4][5, 6][7]. En estos modelos la ecuación de movimiento relaciona al "potencial" con la "intensidad de campo", y corresponde a la realización que debe satisfacer el casimir $\mathbb{P}.\mathbb{J}$ del grupo de Poincaré, con \mathbb{P} la realización del momentum lineal y \mathbb{J} la realización de la parte de spin del dual del momentum angular

$$\Psi = \frac{1}{ms}(\mathbb{P}.\mathbb{J})\Psi, \quad (1.1)$$

donde Ψ es un objeto que transforma linealmente bajo el grupo de Lorentz. Para $s = 1, 2$ la ecuación (1.1) se escribe en componentes, respectivamente, como

$$a_\mu = \frac{1}{m}f_\mu(a), \quad (1.2)$$

$$h_\mu^{Ta} = \frac{1}{m}\omega_\mu^a(h^{Ta}), \quad (1.3)$$

donde $f_\mu(a) = \varepsilon_\mu^{\nu\lambda}\partial_\nu a_\lambda$ corresponde al dual de la intensidad del campo de Maxwell y $\omega_\mu^a(h)$ corresponde al dual de la conexión de spin sin torsión, linealizada (h_μ^{Ta} es simétrico, transverso y sin traza). Éstas ecuaciones pueden escribirse para otros objetos

y corresponden a otras teorías de spin 1 y 2 equivalentes a las autoduales, y que a su vez gozan de tener invariancias de calibre adicionales. En el caso de $s = 1$ la ecuación también corresponde a una realización del álgebra de Poincaré si tomamos como campo matriz al dual del campo de Maxwell $F_{\mu\nu}(a)$. La teoría correspondiente es el modelo topológico masivo, para el cual se conoce bastante que bien que es dual a la teoría masiva autodual vectorial y resulta completamente equivalente si el espacio base es topológicamente trivial.

Para la ecuación autodual de spin 2, puede verse que ésta también se realiza si en lugar del $h_\mu{}^a$ consideramos a la conexión de spin linealizada $\omega_\mu{}^a$ o al tensor de Einstein Linealizado $G_\mu{}^a$. En el primer caso corresponde al modelo intermedio [5] y en el segundo la model topológico masivo linealizado [2]. Estos tres modelos tienen el mismo espectro y se ha visto que podemos a partir del modelo topológico masivo hasta el autodual fijando las simetrías de calibre que posee el modelo original [8].

En este trabajo veremos que, tal como sucede en los modelos vectoriales, los modelos de spin 2 estan conectados por transformaciones de dualidad que van incorporando las invariancias de calibre que distinguen a un modelo de otro. En el Capítulo 2 haremos una rápida introducción al grupo de Poincaré y sus representaciones, obteniendo así de, manera heurística, las ecuaciones de movimiento que deben cumplir las realizaciones masivas del álgebra para spin entero (no nulo). Luego en el Capítulo 3 veremos como es la situación entre los modelos vectoriales, como se conectan por dualidad y se asoman algunos resultados concernientes a la relación entre las funciones de partición de los modelos considerados. En el Capítulo siguiente se repite el programa para los tres modelos de spin 2.

Las notaciones y convenciones para las teorías de spin 2 se dan en el Apéndice.

Capítulo 2

Ecuaciones de movimiento para partículas masivas con spin entero en $D = 2 + 1$

En éste capítulo hacemos un pasaje rápido por el grupo de Poincaré siguiendo lineamientos convencionales [9]. Introduciendo las particularidades que surgen en dimensión $2 + 1$ veremos de manera heurística cuales son las ecuaciones de movimiento que deben cumplir las distintas representaciones del grupo con masa y spin entero generalizando los resultados ya conocidos para spines bajos [10]. La presentación no pretende ser rigurosa, sino mas bien de una forma que se vea como aparecen las ecuaciones de movimiento que deben satisfacer los campos que representan partículas con masa y spin entero. En los capítulos siguientes veremos que estas corresponderán a distintos modelos que estan conectados por transformaciones de dualidad en los casos de $s = 1, 2$.

2.1 El grupo de Poincaré y sus generadores

El grupo de Poincaré, también llamado de Lorentz inhomogéneo, está corformado por las transformaciones que dejan invariante el intervalo $dx^\mu dx_\mu$.

La ley de transformación es

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + c^\mu, \quad (2.1)$$

con $\Lambda^\mu{}_\nu$ una matriz que preserva la métrica de Minkowski (una matriz del grupo de Lorentz, $O(3, 1)$) que satisface

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\lambda{}_\mu \Lambda^\rho{}_\nu \eta_{\lambda\rho}, \quad (2.2)$$

donde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, \dots)$. c^μ es un vector constante, que genera una traslación en el espacio tiempo.

Si representamos los elementos del grupo de Poincaré por $(\mathbf{\Lambda}, c)$, $\mathbf{\Lambda}$ la matriz de Lorentz y c el vector de traslación, el producto de dos elementos del grupo se representa por:

$$(\mathbf{\Lambda}_2, c_2)(\mathbf{\Lambda}_1, c_1) = (\mathbf{\Lambda}_2\mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{\Lambda}_2c_1 + c_2). \quad (2.3)$$

Al cuantizar, estas transformaciones estarán representadas por operadores unitarios lineales o antiunitarios antilineales de forma de preservar la probabilidad de transición entre estados [9]. Así

$$\begin{aligned} U(\mathbf{\Lambda}, c) &= U(\mathbb{I}, c)U(\mathbf{\Lambda}, 0), \\ &\equiv U(c)U(\mathbf{\Lambda}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Si $U(c) = e^{-ic_\mu \mathbb{P}^\mu}$, con \mathbb{P}^μ hermítico. Tendremos que

$$U(c')U(c) = U(c + c'), \quad (2.5)$$

de donde

$$[\mathbb{P}^\mu, \mathbb{P}^\nu] = 0. \quad (2.6)$$

Si tomamos $U(\mathbf{\Lambda}) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathbb{M}^{\mu\nu}}$, entonces de (2.3)

$$U(c')U(\mathbf{\Lambda}')U(c)U(\mathbf{\Lambda}) = U(c')U(\mathbf{\Lambda}'c')U(\mathbf{\Lambda}')U(\mathbf{\Lambda}),$$

ó

$$U(\mathbf{\Lambda}')U(c)U^{-1}(\mathbf{\Lambda}') = U(\mathbf{\Lambda}'c), \quad (2.7)$$

de donde, al desarrollar las exponenciales, llegamos a que \mathbb{P}^μ transforma como un vector

$$U(\mathbf{\Lambda})\mathbb{P}^\mu U^{-1}(\mathbf{\Lambda}) = (\mathbf{\Lambda}^{-1})^\mu{}_\nu \mathbb{P}^\nu \quad (2.8)$$

y adicionalmente, teniendo en cuenta que la transformación es infinitesimal, i.e.

$$\mathbf{\Lambda}^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$$

$$i[\mathbb{P}^\alpha, \mathbb{M}^{\mu\nu}] = \eta^{\mu\alpha}\mathbb{P}^\nu - \eta^{\nu\alpha}\mathbb{P}^\mu. \quad (2.9)$$

Finalmente, del hecho que $U^{-1}(\mathbf{\Lambda}) = U(\mathbf{\Lambda}^{-1})$, tendremos que

$$U(\mathbf{\Lambda}')U(\mathbf{\Lambda})U^{-1}(\mathbf{\Lambda}') = U(\mathbf{\Lambda}'\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}'^{-1}), \quad (2.10)$$

de donde se obtiene las reglas de conmutación del operador hermítico $\mathbb{M}^{\mu\nu}$

$$i[\mathbb{M}^{\mu\nu}, \mathbb{M}^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\rho}\mathbb{M}^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\rho}\mathbb{M}^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\mathbb{M}^{\nu\rho} + \eta^{\nu\sigma}\mathbb{M}^{\mu\rho}. \quad (2.11)$$

En $D = 2+1$, tenemos la particularidad de que como $\mathbb{M}^{\mu\nu} = -\mathbb{M}^{\nu\mu}$ podemos introducir su dual

$$\mathbb{J}^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\mathbb{M}_{\nu\lambda}, \quad (2.12)$$

y, entonces, las relaciones de conmutación entre los generadores quedan como

$$\begin{aligned} i[\mathbb{P}^\mu, \mathbb{P}^\nu] &= 0 & (a), \\ i[\mathbb{P}^\mu, \mathbb{J}^\nu] &= -\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\mathbb{P}_\lambda & (b), \\ i[\mathbb{J}^\mu, \mathbb{J}^\nu] &= -\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\mathbb{J}_\lambda & (c), \end{aligned} \quad (2.13)$$

que se refiere como el álgebra entre los generadores del grupo de Poincaré. Es fácil ver que \mathbb{J}^0 esta asociada a las rotaciones en el plano ($U(R) = e^{i\theta\mathbb{J}^0}$, para $\omega_{ij} = -\varepsilon_{ij}\theta$) y \mathbb{J}^i a los “boost”.

Otra particularidad interesante de $D = 2+1$ es la consideración de las transformaciones discretas impropias. En el caso de la inversión temporal la transformación es la usual

$$\begin{aligned} &T \\ (x^0, x^1, x^2) &\longrightarrow (-x^0, x^1, x^2), \end{aligned} \quad (2.14)$$

Sin embargo la inversión espacial $(x^0, x^1, x^2) \longrightarrow (x^0, -x^1, -x^2)$ corresponde a una rotación de 180° , que es una transformación propia, es decir $\det\mathbf{\Lambda}_{IE} = +1$. En esta dimensión la transformación que se refiere como paridad, es la transformación impropia

$$\begin{aligned} &P \\ (x^0, x^1, x^2) &\longrightarrow (x^0, -x^1, x^2). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Sean \mathcal{P}_μ^ν y \mathcal{T}_μ^ν la representación matricial de las transformaciones de inversión temporal y paridad. Los operadores que las representan serán

$$T = U(\mathcal{T}, 0) \quad , \quad P = U(\mathcal{P}, 0). \quad (2.16)$$

Así, para una transformación (Λ, c) sucede que

$$\begin{aligned} PU(\Lambda, c)P^{-1} &= U(\mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}c) & (a), \\ TU(\Lambda, c)T^{-1} &= T(\mathcal{T}\Lambda\mathcal{T}^{-1}, \mathcal{T}c) & (b), \end{aligned} \quad (2.17)$$

con $U(\Lambda, c) = \mathbb{I} - ic_\mu\mathbb{P}^\mu + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathbb{M}^{\mu\nu} + \dots$.

Desarrollando miembro a miembro en (2.17) obtenemos

$$\begin{aligned}
 P i \mathbb{P}^\mu P^{-1} &= i \mathcal{P}^\mu{}_\nu \mathbb{P}^\nu, & (a) \\
 P i \mathbb{M}^{\mu\nu} P^{-1} &= i \mathcal{P}^\mu{}_\alpha \mathcal{P}^\nu{}_\beta \mathbb{M}^{\alpha\beta}, & (b) \\
 T i \mathbb{P}^\mu T^{-1} &= i \mathcal{T}^\mu{}_\nu \mathbb{P}^\nu, & (c) \\
 T i \mathbb{M}^{\mu\nu} T^{-1} &= i \mathcal{T}^\mu{}_\alpha \mathcal{T}^\nu{}_\beta \mathbb{M}^{\alpha\beta}, & (d)
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

donde se han dejado los i explícitos dado que no sabemos si los operadores P o T son unitarios y lineales o antiunitarios y antilineales. Dado que $P^0 \sim H$ (la energía), si tomamos $\mu = 0$ en (2.18a) notamos que si supieramos que P es antiunitario y antilineal llegaríamos a una situación físicamente inaceptable. Así P es unitario y lineal. Análogamente tomando $\mu = 0$ en (2.18c), obtendremos que para tener una transformación físicamente aceptable requerimos que T sea antiunitario y antilineal. Por tanto (2.18) se escribe como

$$\begin{aligned}
 P \mathbb{P}^\mu P^{-1} &= \mathcal{P}^\mu{}_\nu \mathbb{P}^\nu, & (a) \\
 P \mathbb{M}^{\mu\nu} P^{-1} &= \mathcal{P}^\mu{}_\alpha \mathcal{P}^\nu{}_\beta \mathbb{M}^{\alpha\beta}, & (b) \\
 T \mathbb{P}^\mu T^{-1} &= -\mathcal{T}^\mu{}_\nu \mathbb{P}^\nu, & (c) \\
 T \mathbb{M}^{\mu\nu} T^{-1} &= -\mathcal{T}^\mu{}_\alpha \mathcal{T}^\nu{}_\beta \mathbb{M}^{\alpha\beta}, & (d)
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Para ver como transforman los \mathbb{J}^μ notamos que bajo transformaciones de Lorentz la densidad de Levi-Civita permanece invariante. Así en concordancia con el hecho de que $\mathbb{M}^{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico \mathbb{J}^α es una densidad vectorial de peso 1; y entonces

$$\begin{aligned}
 P \mathbb{J}^\mu P^{-1} &= \det(\mathcal{P}) \mathcal{P}^\mu{}_\nu \mathbb{J}^\nu, & (a) \\
 T \mathbb{J}^\mu T^{-1} &= -\det(\mathcal{T}) \mathcal{T}^\mu{}_\nu \mathbb{J}^\nu. & (b)
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Observamos, así, que bajo paridad e inversión temporal sucede que

$$\begin{aligned}
 P \mathbb{J}^0 P^{-1} &= -\mathbb{J}^0, & (a) \\
 P \mathbb{P}^0 P^{-1} &= \mathbb{P}^0, & (b)
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Como \mathbb{J}^0 tiene que ver con las rotaciones alrededor de un eje imaginario perpendicular al plano $x^1 x^2$ con el sentido de rotación positivo según $\hat{x}_1 \times \hat{x}_2$, observamos que al hacer la reflexión $x^1 \rightarrow -x^1$ este nuevo observador tiene el eje de rotación positivo en el sentido opuesto. En otra dirección al hacer la inversión temporal el nuevo observador ve a los objetos rotar en sentido contrario. Estas dos afirmaciones están explícitas en (2.21a). Las transformaciones de \mathbb{P}^0 en (2.21b) son las que tienen sentido físico tal como argumentamos anteriormente.

Finalmente, el objeto $\mathbb{P}_\mu \mathbb{J}^\mu$ se comporta como un pseudo escalar

$$T\mathbb{P}_\mu \mathbb{J}^\mu T^{-1} = \det(\mathcal{T})\mathbb{P}_\mu \mathbb{J}^\mu, \quad (2.22)$$

$$P\mathbb{P}_\mu \mathbb{J}^\mu P^{-1} = \det(\mathcal{P})\mathbb{P}_\mu \mathbb{J}^\mu. \quad (2.23)$$

Éste tendrá importancia en la sección siguiente.

2.2 Casimires

Cuando estudiamos representaciones del grupo de Poincaré, nos interesa los casimires del grupo, estos resultan ser naturalmente $\mathbb{P}_\mu \mathbb{P}^\mu$ y $\mathbb{P}_\mu \mathbb{J}^\mu$. Para una partícula de masa m en reposo estos tienen el valor [10][11]

$$\mathbb{P}_\mu \mathbb{P}^\mu = -m^2, \quad \mathbb{P}_\mu \mathbb{J}^\mu = -m\mathbb{J}^0 \equiv +ms, \quad (2.24)$$

donde diremos que s es el spin de la representación. Dado su analogía con el concepto de helicidad, en algunos casos se le suele llamar “helicidad” de la representación, quedando claro que no corresponde a una excitación sin masa como sucede en 3+1 dimensiones. Finalmente notamos que, teniendo en cuenta (2.21), al hacer una transformación discreta de paridad cambia el valor de \mathbb{J}^0 de s a $-s$. Se afirma, entonces, que una teoría que describa una sola excitación de masa m y spin s necesariamente será sensible a las transformaciones impropias. Estas representaciones son unidimensionales y satisfacen las condiciones de la capa de masa

$$(\mathbb{P}_\mu \mathbb{P}^\mu - m^2)|\psi\rangle = 0 \quad (a),$$

y la de “Pauli-Lubanski”

$$(\mathbb{P}_\mu \mathbb{J}^\mu - ms)|\psi\rangle = 0 \quad (b). \quad (2.25)$$

Cuando intentamos realizar alguna de estas representaciones, introducimos objetos que transformen linealmente bajo el grupo de Lorentz homogéneo y entonces los grados de libertad adicionales se eliminan dando condiciones suplementarias adicionales.

Recalcamos, para concluir, que en 2+1 dimensiones una partícula de spin s y masa m tiene un sólo grado de libertad [10] (a diferencia del mismo caso en 3+1 dimensiones, donde tiene $2s + 1$ grados de libertad).

2.3 Realizaciones con $s=1$

Para una realización del grupo de Poincaré con $s=1$, usamos como objeto a un campo vectorial V^μ . Éste transforma linealmente bajo el grupo de Lorentz. Al operador \mathbb{P}_μ lo realizamos como

$$(\mathbb{P}_\mu)^\alpha{}_\beta = i\delta^\alpha{}_\beta \partial_\mu \quad (2.26)$$

y al operador \mathbb{J}^μ como

$$\begin{aligned} (\mathbb{J}_{\mu 1})^\alpha{}_\beta &= -\varepsilon^\mu{}_\lambda{}^\rho x^\lambda (\mathbb{P}_\rho)^\alpha{}_\beta + i\varepsilon^{\alpha\mu}{}_\beta \quad (\text{a}), \\ &\equiv (L^\mu)^\alpha{}_\beta + (j^\mu)^\alpha{}_\beta \quad (\text{b}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde $(L^\mu)^\alpha{}_\beta$ es la parte orbital usual. \mathbb{P}_μ y $\mathbb{J}_{\mu 1}$ satisfacen, al actuar sobre vectores, el álgebra (2.13)

$$\begin{aligned} i[\mathbb{P}^\mu, \mathbb{P}^\nu]^\alpha{}_\beta &= 0 \quad (\text{a}), \\ i[\mathbb{P}^\mu, \mathbb{J}_1^\nu]^\alpha{}_\beta &= -\varepsilon^{\mu\nu\lambda} (\mathbb{P}_\lambda)^\alpha{}_\beta \quad (\text{b}), \\ i[\mathbb{J}_1^\mu, \mathbb{J}_1^\nu]^\alpha{}_\beta &= -\varepsilon^{\mu\nu\lambda} (\mathbb{J}_{1\lambda})^\alpha{}_\beta \quad (\text{c}). \end{aligned} \quad (2.28)$$

La condición de Pauli-Lubanski se “lee” ahora como

$$[(\mathbb{P}_\mu \mathbb{J}_1^\mu) - m s \mathbb{I}]^\alpha{}_\beta V^\beta = 0, \quad (2.29)$$

(con $s = \pm 1$). En componentes

$$(-\varepsilon^{\alpha\mu}{}_\beta \partial_\mu - m s \delta^\alpha{}_\beta) V^\beta = 0, \quad (2.30)$$

de donde surgen las condiciones suplementarias $\partial_\mu V^\mu = 0$ y el vínculo $V^0 = -\frac{1}{m s} \varepsilon^{ij} \partial_i V_j$ dejándonos con un solo grado de libertad. Teniendo en cuenta la transversalidad de V^μ obtendremos que

$$[-\mathbb{P}_\mu \mathbb{J}_1^\mu - m s \mathbb{I}][\mathbb{P}_\nu \mathbb{J}_1^\mu - m s \mathbb{I}]^\alpha{}_\beta V^\beta = 0, \quad (2.31)$$

que nos lleva a la condición de la capa de masa

$$(-\square + m^2) V^\alpha = 0 \quad (2.32)$$

tanto para $s = +1$ ó -1 .

2.4 Realizaciones con $s = 2$

Para $s = 2$, el objeto que usaremos es un tensor $h_{\mu\nu}$ simétrico. El operador $(\mathbb{J}_2^\mu)_{\rho\sigma}{}^{\alpha\beta}$ es ahora

$$\begin{aligned}
(\mathbb{J}_2^\mu)_{\alpha\beta}{}^{\gamma\sigma} &= -i\varepsilon^\mu{}_\lambda{}^\rho x^\lambda (\mathbb{I}_s)_{\alpha\beta}{}^{\gamma\sigma} \partial_\mu + \\
&\quad + \frac{i}{2} (\delta_\alpha^\gamma \varepsilon_\beta^{\mu\sigma} + \delta_\beta^\gamma \varepsilon_\alpha^{\mu\sigma} + \delta_\alpha^\sigma \varepsilon_\beta^{\mu\gamma} + \delta_\beta^\sigma \varepsilon_\alpha^{\mu\gamma}), \tag{2.33}
\end{aligned}$$

$$\equiv -\varepsilon^\mu{}_\lambda{}^\rho x^\lambda (\mathbb{P}_\mu)_{\alpha\beta}{}^{\gamma\sigma} + (j^\mu)_{\alpha\beta}{}^{\gamma\sigma}, \tag{2.34}$$

donde $(\mathbb{I}_s)_{\alpha\beta}{}^{\gamma\sigma} = \frac{1}{2}(\delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\sigma + \delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\gamma)$ y el primer término es la parte orbital. Es inmediato comprobar que actuando sobre tensores simétricos de segundo orden estos operadores satisfacen el álgebra del grupo de Poincaré.

$$\begin{aligned}
i[\mathbb{P}^\mu, \mathbb{P}^\nu]_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma} &= 0 & \text{(a),} \\
i[\mathbb{P}^\mu, \mathbb{J}_2^\nu]_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma} &= -\varepsilon^{\mu\nu\lambda} (\mathbb{P}_\lambda)_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma} & \text{(b),} \\
i[\mathbb{J}_2^\mu, \mathbb{J}_2^\nu]_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma} &= -\varepsilon^{\mu\nu\lambda} (\mathbb{J}_{2\lambda})_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma} & \text{(c),}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

La condición de Pauli-Lubanski es ahora

$$[(\mathbb{P}_\mu \mathbb{J}_2^\mu) - ms\mathbb{I}]_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} = 0, \tag{2.36}$$

con $s = \pm 2$.

Las condiciones suplementarias que impondremos son, además de la simetría, que el tensor sea transverso y sin traza

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 0. \tag{2.37}$$

Así, la ecuación (2.36) en componentes es

$$-2\varepsilon_\alpha{}^{\mu\sigma} \partial_\mu h_{\sigma\beta}^{Tt} - ms h_{\alpha\beta}^{Tt} = 0, \tag{2.38}$$

donde $h_{\alpha\beta}^{Tt}$ denota a un tensor simétrico, transverso y sin traza. Éste tiene dos componentes independientes y puede verse que de éstas sólo se propaga una de ellas en (2.38).

Finalmente la condición de la capa de masa se obtiene si procedemos al igual que en (2.31). En componentes

$$(-2\varepsilon_\alpha{}^{\mu\theta_1} \delta_\beta^{\theta_2} \partial_\mu - ms \delta_\alpha^{\theta_1} \delta_\beta^{\theta_2})(2\varepsilon_{\theta_1}{}^{\nu\rho} \delta_{\theta_2}^\sigma \partial_\nu - ms \delta_{\theta_1}^\rho \delta_{\theta_2}^\sigma) h_{\rho\sigma}^{Tt} = 4(-\square + m^2) h_{\rho\beta}^{Tt} \tag{2.39}$$

para $s = \pm 2$.

2.5 Realizaciones con $s = n$, con n entero

Los resultados de la sección anterior pueden generalizarse para $s = n$ entero. El objeto fundamental será un tensor de orden n simétrico $h_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}$, al cual imponemos que sea transverso y sin traza en un par de índices

$$\partial^\mu h_{\mu\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-1}} = 0, \quad \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-2}} = 0. \quad (2.40)$$

Como un tensor simétrico de orden n tiene $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ se obtiene, teniendo en cuenta las condiciones subsidiarias, que el número de componentes independientes es

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = 2$$

El operador asociado al momento angular $(\mathbb{J}_n^{\mu})_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}^{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n}$ se generaliza como

$$\begin{aligned} (\mathbb{J}_n^{\mu})_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}^{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n} &= -i\varepsilon^\mu{}_\lambda{}^\nu x^\lambda (\mathbb{I}_s)_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}^{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n} \partial_\nu + \cdots \\ &\quad + \frac{i}{n!(n-1)!} \varepsilon_{(\sigma_1}{}^{\mu(\rho_1} \delta_{\sigma_2}^{\rho_2} \cdots \delta_{\sigma_n)}^{\rho_n)}, \\ &\equiv -\varepsilon^\mu{}_\lambda{}^\nu x^\lambda (\mathbb{P}_\nu)_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}^{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n} + (j^\mu)_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}^{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

con $(\mathbb{I}_s)_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}^{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n} = \frac{1}{n!} \delta_{(\sigma_1}^{\rho_1} \delta_{\sigma_2}^{\rho_2} \cdots \delta_{\sigma_n)}^{\rho_n}$, donde $(\mu_1\mu_2\cdots\mu_n)$ significa simetrización en los n índices. El primer término en (2.41) es la parte orbital, en analogía con los casos vistos. Se comprueba que actuando sobre tensores simétricos de orden n estos operadores satisfacen el álgebra del grupo de Poincaré.

Lo que sigue es la generalización de la condición de Pauli-Lubanski que es ahora

$$[(\mathbb{P}_\mu \mathbb{J}_n^\mu) - m s \mathbb{I}]_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}^{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n} h_{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n} = 0, \quad (2.42)$$

con $s = \pm n$. Teniendo en cuenta las propiedades y condiciones subsidiarias de $h_{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n}$, ésta ecuación queda en componentes como

$$-n\varepsilon_{\rho_1}{}^{\mu\sigma} \partial_\mu h_{\sigma\rho_2\rho_3\cdots\rho_n}^{Tt} - m s h_{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n}^{Tt} = 0, \quad (2.43)$$

La condición de la capa de masa $(-\square + m^2)h_{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n}^{Tt} = 0$ se obtiene directamente de forma análoga a los casos de spin 1 y 2. Para ver que finalmente se propaga una sola excitación notamos que $h_{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n}^{Tt}$ se descompone en dos partes irreducibles

$$h_{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n}^{Tt(\pm)} = \frac{1}{2} \left(h_{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n}^{Tt} \mp \varepsilon_{\rho_1}{}^{\mu\sigma} \frac{\partial_\mu}{\square^{\frac{1}{2}}} h_{\sigma\rho_2\rho_3\cdots\rho_n}^{Tt} \right), \quad (2.44)$$

con lo que (2.43) queda como ($s = n$)

$$(\square^{\frac{1}{2}} - m) h_{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n}^{Tt(+)} + (\square^{\frac{1}{2}} + m) h_{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n}^{Tt(-)} = 0, \quad (2.45)$$

de donde observamos que en la capa de masa solo una de las partes se propaga.

Para finalizar este capítulo señalamos que, aunque en este trabajo nos abocaremos a teorías de spines 1 y 2, hay estudios realizados con distintos modelos que constituyen realizaciones para $s = 3, 4, \dots$ [7][12].

Capítulo 3

Dualidad para teorías con spin 1

En este capítulo mostraremos que dos realizaciones posibles con $s = 1$, están conectadas por una transformación de dualidad. Los modelos difieren en las simetrías de calibre que tiene cada uno, pudiendo conectarlos igualmente fijando el calibre en uno de los modelos. El proceso de dualidad que seguiremos y que luego generalizaremos a spin 2 está desarrollado en la referencia [13].

A nivel de las funciones de partición se verá que éstas difieren en un factor topológico el cual es sensible a la topología de la variedad base.

En la discusión también veremos que, así como se sabe que las acciones de los modelos, que describen partículas masivas con un spin dado, deben ser sensibles a paridad e inversión temporal, puede mostrarse que el modelo de Proca se desacopla en dos modelos que corresponden a excitaciones masivas con spines opuestos, cuya presencia es necesaria para tener un modelo invariante bajo estas transformaciones discretas.

Este capítulo servirá de base para la discusión del capítulo siguiente donde trataremos la dualidad entre modelos de spin 2.

3.1 Los modelos como realizaciones del álgebra de Poincaré

Para la descripción de una teoría masiva con spin 1, tomamos como objeto a un campo vectorial V^μ . Tal como discutimos en el capítulo anterior a condición de Pauli-Lubanski se escribe en componentes como

$$(-\varepsilon_\beta^{\alpha\mu}\partial_\mu - ms\delta_\beta^\alpha)V^\beta = 0, \quad (3.1)$$

de donde ocurre que $\partial_\mu V^\mu = 0$. La teoría que tiene a (3.1) como ecuación de movimiento corresponde al modelo actual (SD) [3][4]

$$S_{SD} = -\frac{ms}{2} \int d^3x (V_\mu \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu V_\lambda + ms V_\mu V^\mu), \quad (3.2)$$

con $s = \pm 1$. Puede verse que los generadores asociados a la invariancia de la teoría por el grupo $ISO(2, 1)$ satisfacen el álgebra de éste grupo y que el spin es efectivamente $s(+1 \text{ ó } -1)$ [15][16].

En $2 + 1$ dimensiones, un vector es el dual de un tensor antisimétrico, digamos $F_{\mu\nu}$. Así la ecuación (3.1) se escribe igualmente como

$$(\varepsilon_\beta^{\alpha\mu} \partial_\mu - ms \delta_\beta^\alpha) \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\beta\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right) = 0. \quad (3.3)$$

La condición $\partial_\mu V^\mu = 0$ es ahora

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0. \quad (3.4)$$

cuya solución local es $F_{\mu\nu}(a) = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$. Resulta que (3.4) es justamente la identidad de Bianchi que satisface el tensor de Maxwell, $F_{\mu\nu}$, en dimensión $2+1$.

Así (3.3) y (3.4) se juntan en una sola ecuación como

$$(\varepsilon^{\alpha\mu}{}_\beta \partial_\mu - ms \delta_\beta^\alpha) f^\beta(a) = 0, \quad (3.5)$$

con $f^\mu(a) = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda}(a)$. Estas son la ecuaciones de movimiento del modelo Topológico Masivo (TM) [2] cuya acción es

$$\begin{aligned} S_{TM} &= \int d^3x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(a) F^{\mu\nu}(a) + \frac{ms}{2} a_\mu \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu a_\lambda \right), \quad (a) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x (f_\mu(a) f^\mu(a) + ms a_\mu f^\mu(a)), \quad (b) \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde $s = \pm 1$. Es importante recalcar que si empezáramos con la acción autodual con $V^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda}(a)$, las ecuaciones de movimiento seran igualmente equivalentes a las del modelo TM a nivel local.

Las ecuaciones (3.6) son invariantes bajo las transformaciones de calibre $\delta a_\mu = \partial_\mu \lambda$. La componente 0 de (3.5) es la ley de Gauss modificada, que luego en el procedimiento Hamiltoniano pasa a ser el generador de las transformaciones de calibre de los a_i , siendo a_0 el multiplicador de Lagrange asociado. Una vez fijado el calibre nos quedará un sólo grado de libertad, como debe de ser.

La teoría TM es también una teoría covariante bajo el grupo $ISO(2, 1)$ y tiene spin $s(+1 \text{ ó } -1)$ [2].

Tal como vimos en el capítulo anterior la condición de Pauli-Lubanski es sensible a paridad e inversión temporal. Tanto el modelo SD como el TM poseen esta característica si consideramos transformaciones discretas P y T. Bajo estas transformaciones sucede que

$$\begin{aligned}
 Pa_0(x)P^{-1} &= a_0(x_P), \\
 Pa_1(x)P^{-1} &= -a_1(x_P), \\
 Pa_2(x)P^{-1} &= a_2(x_P),
 \end{aligned} \tag{a}$$

$$\begin{aligned}
 Ta_0(x)T^{-1} &= a_0(x_T), \\
 Ta_i(x)T^{-1} &= -a_i(x_T),
 \end{aligned} \tag{b}$$

con

$$\begin{aligned}
 x_P^\mu &= (x^0, -x^1, x^2), \\
 x_T^\mu &= (-x^0, x^1),
 \end{aligned} \tag{c}$$

igualmente sucede con $V_\mu(x)$ en el modelo autodual. En ambos casos el término de Cheen-Simons (CS) $a_\mu \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu a_\lambda$ (ó $V_\mu \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu V_\lambda$) cambia de signo. Así una transformación combinada PT deja invariante a éste término. Tenemos que los modelos SD y TM son sensibles a paridad e inversión temporal. El spin de las excitaciones en el modelo SD y TM es $s = \frac{m}{|m|}$ [2][17][15][16], así al cambiar del signo del término de CS sencillamente cambia el spin de la excitación, por tanto las transformaciones impropias nos llevan a un modelo de igual tipo pero con spin opuesto.

Una diferencia notoria de caracter topológico entre los modelos *TM* y *SD* es que en la ecuación (3.1) del modelo *SD* las únicas soluciones correspondientes a $F_{\mu\nu}(V) = 0$ son las triviales ($V_\mu = 0$), en cambio para la *TM* en (3.5) las soluciones triviales y no triviales están explícitamente incluídas. Tenemos, por tanto, que el espacio de soluciones de ambos modelos son diferentes y difieren al menos en un sector asociado con las soluciones no triviales de $F_{\mu\nu} = 0$ el cual está íntimamente relacionado con el primer grupo de cohomología de la variedad base. Éste espacio es precisamente el espacio de soluciones del modelo de Chern-Simons puro [19, 20].

Si queremos una teoría que preserve P y T debemos tener presente dos excitaciones con spines opuestos (e igual masa). Éste es el caso del modelo de Proca

$$S_P = \int d^3x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2} a_\mu a^\mu \right), \tag{3.8}$$

el cual puede verse que es invariante bajo estas transformaciones discretas. Para corroborar la afirmación hecha, reescribimos la acción (3.8) a primer orden

$$\bar{S}_P = \int d^3x \left(\varepsilon^{\mu\nu\lambda} b_\mu \partial_\nu a_\lambda - \frac{1}{2} b_\mu b^\mu - \frac{m^2}{2} a_\mu a^\mu \right), \tag{3.9}$$

donde b_μ es un pseudo-vector para mantener la invariancia bajo P y T en la acción (3.9). Haciendo variaciones respecto a b^μ obtenemos $b^\mu = f^\mu(a)$ que al sustituir en \bar{S}_P nos lleva a (3.8). Si hacemos el cambio

$$\begin{aligned}
a_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{1\mu} + a_{2\mu}), \quad (\text{a}) \\
b_\mu &= \frac{m}{\sqrt{2}}(a_{1\mu} - a_{2\mu}), \quad (\text{b})
\end{aligned} \tag{3.10}$$

y sustituimos en (3.9) obtendremos, eliminando las contribuciones de borde

$$\begin{aligned}
\bar{S}_P \Big|_{10} = & -\frac{1}{2} \int d^3x [-\varepsilon^{\mu\nu\lambda} a_{1\mu} \partial_\nu a_{1\lambda} + m a_{1\mu} a_1^\mu + \\
& + \varepsilon^{\mu\nu\lambda} a_{2\mu} \partial_\nu a_{2\lambda} + m a_{2\mu} a_2^\mu],
\end{aligned} \tag{3.11}$$

que corresponde a dos modelos SD desacoplados. Uno con $s = -1$ (el de $a_{1\mu}$) y otro con $s = +1$ (el de $a_{2\mu}$).

Las transformaciones P y T las definimos ahora de forma que incluyan un intercambio de los campos $a_{1\mu}$ y $a_{2\mu}$. Así el carácter pseudo-tensorial de b_μ aparece y (3.11) queda invariante. En el capítulo siguiente cuando veamos las teorías con $s = 2$ veremos que esta situación reaparece con el modelo de Einstein-Fierz-Pauli.

Pasamos ahora a conectar los modelos SD y TM por dualidad.

3.2 Dualidad entre los modelos SD y TM

El esquema de dualidad que utilizaremos es el siguiente [13] [14]: partiendo de la teoría SD con un campo vectorial a_μ , introducimos un acoplamiento de la teoría original con otro campo vectorial A_μ el cual forzamos a que corresponda a una conexión plana ($F_{\mu\nu}(A) = 0$) por la vía de un multiplicador de Lagrange B_μ . La teoría acoplada con a_μ , A_μ y B_μ es equivalente localmente al modelo SD. La teoría dual corresponderá a la teoría resultante luego de eliminar a a_μ y A_μ usando las ecuaciones de movimiento. Este proceso de eliminación es equivalente al que hiciéramos en la integral funcional.

Empezamos, así con el modelo autodual

$$S_{SD} = -\frac{m}{2} \int d^3x [\varepsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda + m a_\mu a^\mu]. \tag{3.12}$$

En variedades triviales el primer término de esta acción es equivalente a otro escrito de la forma $\varepsilon^{\mu\nu\lambda} (a_\mu + A_\mu) \partial_\nu (a_\lambda + A_\lambda)$ si el campo auxiliar A_μ le es impuesta la condición $F_{\mu\nu}(A) = 0$. En variedades no triviales no tiene porque ser así y por esta vía a las propiedades topológicas no triviales pueden ser introducidas dentro de la formulación.

El modelo acoplado será

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{SD} = -\frac{m}{2} \int d^3x [\varepsilon^{\mu\nu\lambda} (a_\mu + A_\mu) \partial_\nu (a_\lambda + A_\lambda) + \\ + m a_\mu a^\mu + 2B_\mu \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda], \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde el campo B_μ aparece como un multiplicador que forza a A_μ a ser una conexión plana ($\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\lambda A_\lambda = 0$).

Las ecuaciones de movimiento del modelo \tilde{S}_{SD} , al hacer variaciones independientes en los campos, son:

$$\begin{aligned} -m^2 a^\mu - m \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu (a_\lambda + A_\lambda) &= 0 \quad (a) \\ \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu (a_\lambda + A_\lambda + B_\lambda) &= 0 \quad (b) \\ \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda &= 0 \quad (c) \end{aligned} \quad (3.14)$$

las cuales son invariantes bajo las transformaciones de calibre

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda_1 \quad \delta B_\mu = \partial_\mu \Lambda_2. \quad (3.15)$$

La invariancia de calibre asociado a A_μ y la ecuación (3.14c) permiten, localmente, eliminarlo de la acción ($A_\mu = \partial_\mu \lambda \sim 0$) recuperando la acción autodual usual (la ecuación 3.14b permitirá, ahora identificar a_μ con B_μ). Nos interesa ver cual es el modelo asociado con sólo el campo B_μ . Llamemos

$$\tilde{A}_\mu \equiv a_\mu + A_\mu + B_\mu, \quad (3.16)$$

la ecuación (3.14b) dice que

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu \tilde{A}_\lambda = 0, \quad (3.17)$$

y escogemos el calibre

$$\partial_\mu \tilde{A}^\mu = 0. \quad (3.18)$$

De (3.17) tenemos que $\tilde{A}_\mu = 0$, así

$$B_\mu = -(a_\mu + A_\mu). \quad (3.19)$$

Sustituyendo (3.17) y (3.19) en (3.13) llegamos a

$$\tilde{S}_{SD} \Big|_{\tilde{A}_\mu=0} = -\frac{m}{2} \int d^3x (-\varepsilon^{\mu\nu\lambda} B_\mu \partial_\nu B_\lambda + m a_\mu a^\mu - 2B_\mu \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu a_\lambda), \quad (3.20)$$

ahora el papel de a_μ es como un campo auxiliar. El modelo resultante resulta ser una versión a primer orden de la teoría TM. De hecho, las ecuaciones de movimiento de a_μ son

$$-m^2 a^\mu + m \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu B_\lambda = 0$$

ó

$$a^\mu = \frac{1}{m} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu B_\lambda, \quad (3.21)$$

que al sustituir en (3.20) nos llevan al modelo TM en función de B_μ

$$\begin{aligned} \left(\tilde{S}_{SD} \Big|_{\tilde{A}_\mu=0} \right) \Big|_{21} &\equiv S_{TM} \\ &= \int d^3x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(B) F^{\mu\nu}(B) + \frac{m}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} B_\mu \partial_\nu B_\lambda \right), \end{aligned} \quad (3.22)$$

Los cálculos "on shell" hechos hasta ahora pueden hacerse desde el punto de vista de la integración funcional y nos permitirán obtener una relación entre las funciones de partición de los modelos SD y TM. Notemos que (3.13) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{SD} &= -\frac{m}{2} \int d^3x \left[\varepsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda + m a_\mu a^\mu + \right. \\ &\quad \left. + (2a_\mu + 2B_\mu + A_\mu) \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda \right], \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{m}{2} \int d^3x \left[-\varepsilon^{\mu\nu\lambda} B_\mu \partial_\nu B_\lambda + m a_\mu a^\mu - 2B_\mu \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu a_\lambda + \right. \\ &\quad \left. + (a_\mu + B_\mu + A_\mu) \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu (a_\mu + B_\mu + A_\mu) \right], \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde observamos que si hacemos el cambio de variable $2\tilde{A}_\mu - A_\mu = \tilde{B}_\mu$ en (3.23) nos queda el modelo SD mas un término BF. La función de partición de este último es la del modelo Cheen-Simons (CS) puro al cuadrado [18]. Así

$$Z_{\tilde{S}_{SD}} \propto Z_{SD} \cdot (Z_{CS})^2 \quad (3.25)$$

la parte Z_{CS} tiene carácter estrictamente topológico y está relacionado con la torsión de Ray-Singer [18]. Por otro en (3.24) observamos que en la integral funcional es posible hacer la integración en \tilde{A}_μ (entendiéndose que deba hacerse todo el proceso de fijación de calibre) produciéndose un factor Z_{CS} y el resto es la acción TM . Así

$$Z_{\tilde{S}_{SD}} \propto Z_{TM} \cdot Z_{CS}. \quad (3.26)$$

Tenemos, entonces, que

$$Z_{TM} \propto Z_{SD} \cdot Z_{CS} \quad (3.27)$$

que es un resultado conocido [19][13][20].

Concluimos que el modelo SD vectorial

$$S_{SD} = -\frac{m}{2} \int d^3x (\varepsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda + m a_\mu a^\mu)$$

es dual al modelo TM vectorial

$$S_{TM} = \int d^3x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda \right)$$

y sus funciones de partición difieren en un factor topológico asociado a la torsión de Ray-Singer cuyo valor es sensible a las propiedades topológicas de la variedad base. Cuando la topología es trivial estos modelos son completamente equivalentes [4] [21] [17] [19] [13] [20].

Capítulo 4

Dualidad para teorías de spin 2

En este capítulo se presenta el resultado crucial de este trabajo, donde se generaliza la dualidad existente entre los modelos de spin 1 a los de spin 2, reafirmando el hecho ya conocido de que los fenómenos que pueden predecirse para las teorías vectoriales tienen su análogo en los modelos con spin 2 [17].

Veremos que los modelos asociados a la condición de Pauli-Lubanski en este caso resultan ser tres: el modelo autodual de spin 2 (SD) [5], el modelo intermedio (TI) [5] y el modelo topológico masivo linealizado [2]. Luego pasaremos a la generalización del método usado en la referencia [13] a estos modelos. La notación que utilizamos está expuesta en el Apéndice.

4.1 Las acciones involucradas y su relación con la condición de Pauli-Lubanski

En la discusión que dimos relativa a las realizaciones del álgebra de Poincaré con $s = 2$ el objeto considerado fué un tensor de segundo orden, simétrico, transverso y sin traza

$$h_{\mu\nu}^{Tt} = h_{\nu\mu}^{Tt}, \quad \partial^\mu h_{\mu\nu}^{Tt} = 0, \quad h_\mu^{\mu Tt} = 0, \quad (4.1)$$

y la parte asociada al spin del momento angular, la realizamos con el operador (ver (2.34))

$$(\mathbb{J}_2^\mu)_{\alpha\beta}{}^{\gamma\sigma} = \frac{i}{2}(\delta_\alpha^\gamma \varepsilon^{\sigma\mu}{}_\beta + \delta_\alpha^\sigma \varepsilon^{\alpha\mu}{}_\beta + \delta_\beta^\gamma \varepsilon^{\sigma\mu}{}_\alpha + \delta_\beta^\sigma \varepsilon^{\gamma\mu}{}_\alpha). \quad (4.2)$$

Así, la condición de Pauli-Lubanski queda como

$$\frac{1}{2}[(\mathbb{J}^\mu \mathbb{P}_\mu) \pm 2m\mathbb{I}]_{\alpha\beta}{}^{\gamma\sigma} h_{\alpha\sigma}^{Tt} = 0. \quad (4.3)$$

Éste objeto simétrico, transverso y sin traza, tiene dos componentes independientes. Sin embargo en (4.3) puede verse que sólo uno de ellos se propaga. De hecho en este objeto podemos distinguir las partes $h_{\alpha\beta}^{(+Tt)}$ y $h_{\alpha\beta}^{(-Tt)}$ [5][17]

$$h_{\alpha\beta}^{(\pm)Tt} = \frac{1}{2}[h_{\alpha\beta}^{Tt} \pm \frac{1}{2}(\xi_\alpha^\gamma \delta_\beta^\sigma + \xi_\beta^\gamma \delta_\alpha^\sigma)h_{\gamma\sigma}^{Tt}], \quad (4.4)$$

con $\xi_\alpha^\gamma = \varepsilon_\alpha^{\mu\gamma} \rho_\mu$, y $\rho_\mu = \frac{\partial_\mu}{\square^{\frac{1}{2}}}$. Realizando al operador \mathbb{P}_μ como $i\partial_\mu$, (4.4) se escribe como

$$h_{\alpha\beta}^{\pm Tt} = \frac{1}{2}[\mathbb{I}_{\alpha\beta}^{\gamma\sigma} \mp \frac{1}{2\square^{1/2}}(\mathbb{P}_\mu \mathbb{J}^\mu)_{\alpha\beta}{}^{\gamma\sigma}]h_{\alpha\sigma}^{Tt}. \quad (4.5)$$

Así

$$h_{\alpha\beta}^{Tt} = h_{\alpha\beta}^{+Tt} + h_{\alpha\beta}^{-Tt} \quad (4.6)$$

$$[\mathbb{P}_\mu \mathbb{J}^\mu h^{Tt}]_{\alpha\beta} = 2\square^{1/2}(h_{\alpha\beta}^{-Tt} - h_{\alpha\beta}^{+Tt}) \quad (4.7)$$

Vamos, entonces a (4.3) con (4.6) y (4.7), obteniendo

$$-(\square^{1/2} \mp m)h_{\mu\nu}^{+Tt} - (\square^{1/2} \pm m)h_{\mu\nu}^{-Tt} = 0. \quad (4.8)$$

Vemos de esta forma que en la capa de masa ($\square^{1/2} \sim |m|$) una de las dos componentes irreducibles tiene propagación dependiendo del signo de m .

Volviendo a la ecuación (4.3), en componentes queda como

$$\mp \varepsilon_\alpha^{\mu\gamma} \partial_\mu h_{\gamma\beta}^{Tt} + m h_{\alpha\beta}^{Tt} = 0. \quad (4.9)$$

Teniendo en cuenta la expresión de la conexión de spin de torsión nula cuando $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{Tt}$ (ver el Apéndice)

$$\omega_{\mu\nu}(h^{Tt}) = \varepsilon_\mu^{\sigma\lambda} \partial_\sigma h_{\lambda\nu}^{Tt}, \quad (4.10)$$

así (4.9) puede escribirse como

$$h_{\alpha\beta}^{Tt} = \pm \frac{1}{m} \omega_{\alpha\beta}(h^{Tt}), \quad (4.11)$$

que es como una “condición de autodualidad” en $h_{\alpha\beta}^{Tt}$ y la conexión $\omega_{\alpha\beta}$ que generaliza la que aparece en el caso vectorial.

La acción que nos lleva a la ecuación (4.9) luego de eliminar los grados de libertad espúrios es la acción autodual (SD) [5][6]

$$\begin{aligned} S_{SD}^\pm &= -\frac{ms}{4} \int d^3x [h_{\mu\rho} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu h_{\lambda}^\rho + \frac{ms}{2} (h_{\mu\nu} h^{\nu\mu} - h_\mu^\mu h_\nu^\nu)], & (a) \\ &= -\frac{ms}{4} \int d^3x h_\mu^a [\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \eta_{ab} \partial_\nu + \frac{ms}{2} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\mu\lambda\rho} \delta_\rho^c] h_\lambda^b, & (b) \\ &\equiv \frac{m}{2} \int d^3x h_\mu^a K^{\pm\mu}{}^{\lambda}{}_b h_\lambda^b, & (c) \end{aligned} \quad (4.12)$$

con $s = \pm 2$. En (4.12b) se expresa la acción autodual de esa forma para recordar que estamos pensando a h_μ^a como la linealización de la triada, igualmente queda claro cual es el operador de evolución de la acción autodual

$$K^{\pm\mu}{}^{\lambda}{}_{\alpha}{}^{\beta} = -\frac{s}{2}(\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\eta_{\alpha\beta}\partial_\nu + \frac{ms}{2}\varepsilon_{abc}\varepsilon^{\mu\lambda\rho}\delta_\rho^c). \quad (4.13)$$

El campo $h_{\mu\nu}$ en (4.12) no tiene simetrías. Uno podría pensar que, dado que la ecuación (4.9) sólo involucra la parte simétrica, que la parte antisimétrica de $h_{\mu\nu}$ tiene poco que ver, lo cual no es cierto. Para ver esto hagamos la descomposición

$$h_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu\lambda}V^\lambda \text{ con } H_{\mu\nu} = H_{\nu\mu}$$

$$\begin{aligned} S_{SD}^\pm &= \frac{m}{2} \int d^3x [\mp H_{\mu\rho}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu H_\lambda^\rho - m(H_{\mu\nu}H^{\mu\nu} - H_\mu^\nu H_\nu^\mu) + \\ &\quad \pm 2V^\mu(\partial_\rho H_\mu^\rho - \partial_\mu H_\rho^\rho) \pm \varepsilon^{\mu\nu\lambda}V_\mu\partial_\nu V_\lambda - 2mV_\mu V^\mu], \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde observamos que la parte antisimétrica aparece en su parte cuadrática como una excitación autodual de masa $2|m|$ y que además interactúa con la parte de spin 1 del $H_{\mu\nu}$ ($\sim \partial^\mu H_{\mu\nu}$) la cual se propagaría con masa $2|m|$ si no estuviera V_μ . El campo V_μ aparece entonces como un campo auxiliar cuya función es cancelar la propagación de la parte de spin 1 de $H_{\mu\nu}$. Las partes de spin 0 tampoco tienen propagación alguna dejándonos solo con la parte $h_{\mu\nu}^{Tt}$ de $h_{\mu\nu}$.

Se puede realizar el análisis canónico de la teoría SD corroborándose que hay un sólo grado de libertad y de que el hamiltoniano asociado es definido positivo [5][17][22], independiente del signo \pm que solo tiene que ver con el spin de la excitación. Éste análisis se hace por la vía de la acción reducida y además permite verificar que la teoría es covariante on shell y que el spin es $s = 2\frac{m}{|m|} = \pm 2$ [22].

Tanto la condición de Pauli-Lubanski (4.3) como su expresión (4.9), nos sugieren que podríamos pensar en su ecuación de movimiento sobre los grados físicos en función de un tensor que sea 2-covariante, simétrico, transverso y sin traza. En este punto traemos a colación el hecho que para la conexión de spin linealizada y el tensor de Einstein linealizado sucede que (ver el Apéndice)

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu}(h^{Tt}) &= \varepsilon_\mu^{\sigma\lambda}\partial_\sigma H_{\lambda\nu}^{Tt} \\ &= W_{\mu\nu}^{Tt}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(h^{Tt}) &= -\square H_{\mu\nu}^{Tt} \\ &= G_{\mu\nu}^{Tt}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Tendremos, entonces, dos ecuaciones mas asociadas a teorías de spin 2.

$$\begin{aligned} [\mathbb{J}^\mu \mathbb{P}_\mu \pm 2m\mathbb{I}]_{\alpha\beta} \gamma^\sigma W_{\gamma\sigma}^{Tt}(h^{Tt}) &= 0, \quad (\text{a}) \\ [\mathbb{J}^\mu \mathbb{P}_\mu \pm 2m\mathbb{I}]_{\alpha\beta} \gamma^\sigma G_{\gamma\sigma}^{Tt}(h^{Tt}) &= 0 \quad (\text{b}). \end{aligned} \quad (4.17)$$

En el primer caso las ecuaciones de segundo orden corresponden a la teoría intermedia (TI) [5] y en el segundo caso el sistema de ecuaciones de tercer orden corresponden a la teoría topológica masiva (TM) linealizada [2]. Ambos modelos se pueden estudiar de forma canónica y se prueba que describen un sólo grado de libertad y que el spin es $s = 2 \frac{m}{|m|}$ [5] [2] [17] [8].

Recordando la forma en que se escribe la acción SD y la forma de la conexión de torsión nula (ver el Apéndice)

$$\begin{aligned} \omega_\mu^a(h) &= W_\mu^a(h) \\ &= \frac{1}{2} \delta_\lambda^a \varepsilon^{\lambda\nu\gamma} [\partial_\nu (h_{\mu\gamma} + h_{\gamma\mu}) - \partial_\mu h_{\nu\gamma}] \end{aligned} \quad (4.18)$$

estas acciones (de la TI y la TM) se pueden escribir como

$$\begin{aligned} S_{int}^\pm &= \pm \frac{m}{2} \int d^3x h_\mu^a K^{\pm\mu}{}_a{}^\lambda{}_b \frac{1}{m} W_\lambda^b(h) \quad (\text{a}) \\ &= S_E \pm \frac{m}{2} \int d^3x h_\mu^a \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu h_{\lambda a} \quad (\text{b}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} S_{TM}^\pm &= \frac{m}{2} \int d^3x \frac{1}{m} W_\mu^a(h) K^{\pm\mu}{}_a{}^\lambda{}_b \frac{1}{m} W_\lambda^b(h), \quad (\text{a}) \\ &= -S_E \mp \frac{m}{2} \int d^3x \frac{1}{2m} W_\mu^a(h) \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu W_\lambda^b(\eta) \eta_{ab}. \quad (\text{b}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

El último término en (4.20b) se desarrolla como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3x W_\mu^a(h) \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu W_{\lambda a}(h) &= \frac{1}{2} \int d^3x W_\mu^a(h) G^{\mu\nu}(h) \eta_{\nu a}, \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3x h_\mu^a C^{\mu\nu}(h) \eta_{\nu a}, \\ &\equiv S_c, \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde $C^{\mu\nu}(h)$ es el tensor de Cotton linealizado.

La acción de Einstein en (4.19) y (4.20) se escribe en cualquiera de las formas

$$\begin{aligned}
 S_E &= -\frac{1}{2} \int d^3x h_\mu{}^a G^{\mu\nu}(h) \eta_{\nu a}, & (a) \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3x h_\mu{}^a \eta_{ab} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu W_\lambda{}^b(h), & (b) \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3x \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \delta_\lambda^c W_\mu{}^b(h) W_\lambda{}^c(h). & (c)
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Para resumir lo obtenido hasta ahora con las acciones de spin 2 involucradas y que realizan la condición de Pauli-Lubanski definimos:

$$\begin{aligned}
 S_{TCS} &= \frac{1}{2} \int d^3x h_\mu{}^a \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu h_\lambda{}^b \eta_{ab} & (a) \\
 S_{FP} &= -\frac{1}{2} \int d^3x \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} h_\mu{}^a h_\nu{}^b \delta_\lambda^c & (b)
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

cuyos nombres vienen del término triádico de Chern-Simons (o también llamado término traslacional de Chern-Simons) [23] y del término tipo Fierz-Pauli, respectivamente. Con estas definiciones tenemos que las acciones de spin 2 masivo a considerar se escriben como

$$\begin{aligned}
 S_{SD}^\pm &= \mp m S_{TCS} + m^2 S_{FP}, & (a) \\
 S_{int}^\pm &= \pm m S_{TCS} + S_E, & (b) \\
 S_{TM}^\pm &= \mp \frac{1}{m} S_C - S_E, & (c)
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

donde el signo \pm no influye en la positividad de la energía, pero si en el spin. El signo fijo que aparece en cada acción si tiene que ser así para que la energía sea definida positiva. Es notorio que en la acción S_{TM} el signo del término de Einstein es opuesto al usual.

La acción S_{int}^\pm que realiza la condición (4.17a) es invariante, salvo un término de borde, bajo transformaciones de difeomorfismos linealizadas, que será una invariancia de calibre de la teoría. Análogamente la ecuaciones de movimiento de (4.17c) además de ser invariante bajo difeomorfismos, también lo son bajo transformaciones de Lorentz, así que S_{TM} tiene estas dos invariancias de calibre. De hecho la acción S_{TM} sólo depende de la parte simétrica de $h_{\mu\nu}$. Veremos que en el proceso de dualidad lo que haremos es ir agregando invariancias de calibre y aumentando el espacio de soluciones incorporando soluciones no triviales de $\omega_{\mu\nu}(h) = 0$ (en el caso de la TI) y de $G_{\mu\nu}(h) = 0$ (en el caso de la teoría TM). En sentido contrario uno podría ir fijando calibre y pasar de la teoría TM a la TI y de ahí a la teoría SD. Esto fué realizado hace un tiempo en [8].

Una propiedad que comparten todas estas acciones es que la presencia de los términos con la densidad de Levy-Civita son sensibles a las transformaciones discretas P y T. De

hecho al hacer alguna de estas transformaciones pasamos a una teoría del mismo tipo pero que describe el spin opuesto. Cabe aca preguntar si es posible, en analogía con el caso vectorial, construir una teoría que describa excitaciones de spin 2 y que sea invariante bajo P y T. La respuesta es que si y para verlo tomemos el modelo de Einstein masivo descrito por

$$S = S_E + m^2 S_{FP}, \quad (4.25)$$

el cual a primer orden se escribe como

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x [2h_\mu^a \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu w_\lambda^b \eta_{ab} - \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\mu\lambda\rho} \delta_\rho^c (m^2 h_\mu^a h_\lambda^b + w_\mu^a w_\lambda^b)], \quad (4.26)$$

donde queda claro que el campo w aparece de forma auxiliar como un pseudo tensor de segundo orden para garantizar la invariancia bajo las transformaciones impropias P y T. Al hacer variaciones respecto a él obtendremos que es la conexión de spin de torsión nula linealizada, que al sustituirla nos lleva a la acción original de segundo orden. Si hacemos, en analogía con el caso vectorial, el cambio

$$\begin{aligned} h_\mu^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} (h_{1\mu}^a + h_{2\mu}^b), \quad (a) \\ w_\mu^a &= \frac{m}{\sqrt{2}} (h_{1\mu}^a - h_{2\mu}^b), \quad (b) \end{aligned} \quad (4.27)$$

y sustituimos en (4.26) la acción se desacopla en dos modelos autoduales con igual masa (m) y spines opuestos

$$S \longrightarrow S_{SD}^-[h_1] + S_{SD}^+[h_2]. \quad (4.28)$$

Ahora, si al hacer una de estas transformaciones discretas incluimos el cambio entre los campos $h_{1\mu}^a$ y $h_{2\mu}^a$ ésta permanece invariante.

4.2 Dualidad $S_{SD} \longrightarrow S_{int}$

En esta sección generalizaremos el procedimiento llevado a cabo con los modelos vectoriales [13][24]. Partimos de la acción (4.24)

$$S_{SD} = -\frac{ms}{4} \int d^3x (h_\mu^a \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu h_{\lambda a} + \frac{ms}{2} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} h_\mu^a h_\nu^b \delta_\lambda^c). \quad (4.29)$$

La función de partición de esta acción es

$$Z_{SD}(0) = N \int \mathcal{D}h_{\mu\nu} e^{-S_{SD}}. \quad (4.30)$$

El primer término en (4.29) es invariante, salvo un término de borde, bajo la suma a h_μ^a de $\partial_\mu b^a$. Así le sumamos el campo auxiliar $H_{\mu a}$

$$-\frac{ms}{4} \int d^3x (h_\mu^a + H_\mu^a) \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu (h_{\lambda a} + H_{\lambda a}), \quad (4.31)$$

e imponemos la condición

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu H_{\lambda a} = 0, \quad (4.32)$$

que nos permite realizar la transformación de dualidad. De hecho (4.32) es equivalente a tomar $W_\mu^a(H) = 0$. Viendo la forma de $W_\mu^a(H)$ obtendremos que (4.32) obliga a que localmente $H_{\lambda a} = \partial_\lambda b_a$, que es calibrable vía transformaciones de difeomorfismos. Tenemos que la solución de (4.32) es puro calibre y se recupera S_{SD} (4.24). En general para incluir soluciones generales de $W_\mu^a(H) = 0$, se forza (4.32) con un multiplicador de Lagrange. La acción a considerar es entonces

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{SD} = & -\frac{ms}{4} \int d^3x [(h_\mu^a + H_\mu^a) \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu (h_{\lambda a} + H_{\lambda a}) + \\ & + \frac{ms}{2} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} h_\mu^a h_\nu^b \delta_\lambda^c - 2B_{\mu a} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu H_{\lambda a}], \end{aligned} \quad (4.33)$$

si en el último término hacemos el cambio

$$B_{\mu a} \longrightarrow \lambda_{\mu a} - \frac{1}{2} \eta_{\mu a} \lambda_\mu^\mu, \quad (4.34)$$

éste toma la forma $\lambda_{\mu a} W^{\mu a}(H)$. En la integral funcional éste término promueve una $\delta(W_\mu^a(H))$ posiblemente debiendo tener en cuenta algunas sutilezas de caracter topológico [25] que no pretendemos abordar en este trabajo. Podremos así recuperar S_{AD} a nivel de la acción o de su integral funcional. El proceso de dualidad que desarrollaremos lo que pretende es ver cual es la acción que resulta luego de eliminar los campos y dejar la acción que resulte para el multiplicador $B_{\mu a}$. La acción que quede será la del modelo dual.

Veamos el proceso a nivel de la acción. Las ecuaciones de movimiento (4.33) son:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \tilde{S}}{\delta h_{\mu a}} = 0 & \implies -\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu (h_\lambda^a + H_\lambda^a) - \frac{ms}{2} \varepsilon^a_{bc} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} h_\nu^b \delta_\lambda^c = 0, \quad (a) \\ \frac{\delta \tilde{S}}{\delta H_{\mu a}} = 0 & \implies -\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu (h_\lambda^a + H_\lambda^a - B_\lambda^a) = 0 \quad (b), \\ \frac{\delta \tilde{S}}{\delta B_{\mu a}} = 0 & \implies \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu H_\lambda^a = 0. \quad (c) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Las ecuaciones de movimiento son invariantes bajo las transformaciones de calibre

$$\begin{aligned}\delta H_\lambda^a &= \partial_\lambda \zeta^a(a), \\ \delta B_\lambda^a &= \partial_\lambda \tilde{\zeta}^a.(b)\end{aligned}\tag{4.36}$$

La ecuación (4.35c) puede resolverse localmente permitiendo calibrar H_λ^a y al ir a (4.33) recuperamos (4.24). Para que emerja la teoría dual observamos que de (4.35b)

$$\begin{aligned}H_\lambda^a &= B_\lambda^a - h_\lambda^a + l_\lambda^a(a), \\ \text{con } \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu l_\lambda^a &= 0, (b)\end{aligned}\tag{4.37}$$

que sustituimos en (4.33)

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{S}}_{SD} = \tilde{S}_{SD}\Big|_{(37)} &= -\frac{ms}{4} \int d^3x [B_\mu^a \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu B_{\lambda a} + \frac{ms}{2} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} h_\mu^a h_\nu^b \delta_\lambda^c + \\ &\quad - 2B_\mu^a \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu (B_{\lambda a} - h_{\lambda a})], \\ &= -\frac{ms}{4} \int d^3x [-B_\mu^a \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu B_{\lambda a} + \frac{ms}{2} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} h_\mu^a h_\nu^b \delta_\lambda^c + \\ &\quad + 2B_\mu^a \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu h_{\lambda a}].\end{aligned}\tag{4.38}$$

Que corresponde a una versión a primer orden de S_{int} . De hecho, si en $\tilde{\tilde{S}}_{SD}$ hacemos variaciones respecto a $h_{\mu a}$

$$\frac{\delta \tilde{\tilde{S}}_{SD}}{\delta h_{\mu a}} = 0 \implies \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu B_\lambda^a = -\frac{ms}{2} \varepsilon_{bc}^a \varepsilon^{\mu\nu\lambda} h_\nu^b \delta_\lambda^c\tag{4.39}$$

y así (ver el Apéndice)

$$\begin{aligned}h_\mu^a &= -\frac{2}{ms} W_\mu^a{}_\lambda B^\lambda{}^a \\ &= -\frac{2}{ms} W_\mu^a(B)\end{aligned}\tag{4.40}$$

que nos permite eliminar a h_μ^a , quedándonos el modelo dual

$$\begin{aligned}S_{SD}^{dual} &= -\frac{ms}{4} \int d^3x [-B_\mu^a \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu B_{\lambda a} - \frac{2}{ms} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} W_\mu^a(B) W_\nu^b(B) \delta_\lambda^c + \\ &\quad + \frac{4}{ms} B_\mu^a \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu W_\lambda^a(B)], \\ &= \frac{ms}{4} \int d^3x B_\mu^a \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu B_{\lambda a} + S_E(B), (a) \\ &= S_{int}(B) (b)\end{aligned}\tag{4.41}$$

Es importante notar que en el modelo dual el término TCS aparece con un signo opuesto al que tiene originalmente en la teoría SD de partida. Este cambio no está asociado a un cambio de spin, ése es el signo que debe tener para que describa el mismo spin que el modelo de partida. Notemos que en el cálculo se mantuvo el valor de s sin especificar para que sirva a ambos casos ($s = \pm 2$).

Para conectar las funciones de partición notamos que en (4.38) podemos “completar cuadrados”

$$-B_\mu^a \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu B_{\lambda a} + 2B_\mu^a \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu h_{\lambda a} = -(B_\mu^a - h_\mu^a) \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu (B_{\lambda a} - h_{\lambda a}) + h_\mu^a \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu h_{\lambda a} \quad (4.42)$$

así

$$\tilde{S}_{SD} = S_{SD}^+(h) + S_{TCS}(B - h) \quad (4.43)$$

y entonces

$$Z_{\tilde{S}_{SD}} \propto Z_{S_{SD}} Z_{S_{TCS}} \quad (4.44)$$

$$\propto Z_{S_{int}} \quad (4.45)$$

Haciendo un procedimiento análogo en \tilde{S}_{SD} obtendremos

$$\tilde{S}_{SD} = \widetilde{\widetilde{S}_{SD}}(h) - \frac{ms}{2} S_{TCS}(H + h - B), \quad (4.46)$$

de donde entendemos que al sustituir (4.37a) el proceso correspondiente en la integral funcional equivale a hacer la integral de $\tilde{H}_{\mu a} = H_{\mu a} + h_{\mu a} - B_{\mu a}$, incluyendo los términos de fijación de calibre, produciendo un factor $Z_{S_{TCS}}$.

Observamos en (4.44) que las funciones de partición del modelo dual (S_{int}) y el modelo SD difieran en un factor asociado a la función de partición del modelo TCS, el cual está asociado a soluciones de $\omega_\mu^a(h) = 0$. El significado topológico o no trivial que pueda tener este factor merece ser estudiado. Éste podría cobrar valor si consideramos variedades con topología no trivial¹.

El procedimiento que seguimos incorporó la invariancia de calibre bajo difeomorfismos y ya es conocido que S_{int} y S_{SD} se conectan fijando el calibre en el primero [8]. Esta situación es análoga al caso vectorial. Pasamos ahora a la dualidad entre el TI y la TM donde incorporaremos la invariancia que falta: la invariancia bajo transformaciones de Lorentz linealizadas.

¹La dualidad vista desde el punto de vista de las funciones de partición ha sido considerada recientemente de forma mas completa e independiente en [26]

4.3 Dualidad $S_{int} \longrightarrow S_{TM}$

Partimos, ahora, de la acción intermedia con el término de Einstein escrito a segundo orden

$$S_{int} = \frac{1}{2} \int d^3x [h_\mu^a \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu \omega_{\lambda a}(h) + \frac{ms}{2} h_\mu^a \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu h_{\lambda a}]. \quad (4.47)$$

Esta acción es invariante, salvo un término de borde, bajo

$$\delta h_\mu^a = \partial_\mu \zeta^a \quad (4.48)$$

que corresponde a la invariancia bajo difeomorfismos linealizada. Podemos observar también que la parte que corresponde al término de Einstein es invariante, salvo un término de borde, bajo las transformaciones de Lorentz linealizadas

$$\delta h_\mu^a = \varepsilon_\mu^{a\sigma} l_\sigma, \quad \delta \omega_\mu^a(h) = -\partial_\mu l^a. \quad (4.49)$$

Esta invariancia no la tiene el término TCS. Para promoverla modificamos el término en forma análoga a antes

$$-\frac{ms}{4} \int d^3x (h_\mu^a + H_\mu^a) \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu (h_{\lambda a} + H_{\lambda a}), \quad (4.50)$$

e imponemos, ahora, la condición

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu W_{\lambda a}(H) = -G^\mu_a = 0, \quad (4.51)$$

con $W_{\lambda a}(H) = (\eta_{\mu a} \eta_{\lambda b} - \frac{1}{2} \eta_{\lambda a} \eta_{\mu b}) \varepsilon^{\mu\rho\sigma} \partial_\rho H_\sigma^b$, que corresponde a la conexión de spin linealizada de torsión nula. Localmente la solución de (4.51) es “puro calibre” y permite recuperar el término TCS y así la acción intermedia. Globalmente éste no será el caso.

Empezamos así con la acción

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{int} = & \frac{1}{2} \int d^3x [h_\mu^a \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu \omega_{\lambda a}(h) + \frac{ms}{2} (h_\mu^a + H_\mu^a) \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu (h_{\lambda a} + H_{\lambda a}) \\ & + 2B_\mu^a \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu W_{\lambda a}(H)], \end{aligned} \quad (4.52)$$

donde hemos introducido a un multiplicador B_μ^a que forza la condición (4.51).

Las ecuaciones de movimiento de (4.52) son

$$\begin{aligned} \frac{\delta \tilde{S}}{\delta h_{\mu a}} &= 0 \implies \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu [\omega_\lambda^a(h) + \frac{ms}{2} (h_\lambda^a + H_\lambda^a)] = 0, & (a) \\ \frac{\delta \tilde{S}}{\delta H_{\mu a}} &= 0 \implies \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu [W_\lambda^a(B) + \frac{ms}{2} (h_\lambda^a + H_\lambda^a)] = 0. & (b) \\ \frac{\delta \tilde{S}}{\delta B_{\mu a}} &= 0 \implies \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu W_\lambda^a(H) = 0, & (c) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Éstas son invariantes bajo las transformaciones de calibre

$$\begin{aligned} \delta h_\lambda^a &= \partial_\lambda \xi_1^a, & \delta H_\lambda^a &= \partial_\lambda \xi_2^a, & B_\lambda^a &= \partial_\lambda \xi_3^a, \\ \delta h_\lambda^a &= \varepsilon_\lambda^{ab} l_b, & \delta H_\lambda^a &= -\varepsilon_\lambda^{ab} l_b, & B_\lambda^a &= \varepsilon_\lambda^{ab} \tilde{l}_b \end{aligned} \quad (4.54)$$

donde observamos que ha sido promovida la invariancia bajo transformaciones de Lorentz ausente en (4.47). La invariancia de calibre asociada a H_λ^a y la resolución local de (4.53c) permiten recuperar la acción intermedia. Para obtener el modelo dual primero notamos que podemos tomar

$$\begin{aligned} H_\lambda^a &= -h_\lambda^a - \frac{2}{ms} W_\lambda^a(B) + l_\lambda^a(a), \\ \text{con } \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu l_\lambda^a &= 0, \quad (b) \end{aligned} \quad (4.55)$$

que sustituimos en (4.52), llevándonos a

$$\tilde{S}_{int} = \frac{1}{2} \int d^3x [h_\mu^a \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu (\omega_{\lambda a}(h) - 2W_{\lambda a}(B)) - \frac{2}{ms} W_\mu^a(B) \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu W_{\lambda a}(B)]. \quad (4.56)$$

Ahora hacemos variaciones independientes en (4.56) respecto a $h_{\mu a}$ y obtenemos

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu W_\lambda^a(h - B) = 0. \quad (4.57)$$

Usamos la invariancia de calibre Lorentz y de difeomorfismos para fijar $h_\mu^a = B_\mu^a$ y finalmente sustituyendo esta fijación en (4.56) obtendremos

$$\begin{aligned} S_{int}^{dual} &= \tilde{S}_{int} \Big|_{(3.57)} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3x [\varepsilon^{\mu\nu\lambda} B_\mu^a \partial_\nu W_{\lambda a}(B) + \frac{2}{ms} W_\mu^a(B) \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu W_{\lambda a}(B)], \\ &= S_{TM}(B). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Notamos que el primer término en (4.58) corresponde a la acción de Einstein con el signo opuesto al usual, tal como debe suceder en la acción topológica masiva.

En el proceso cuando pasamos de \tilde{S}_{int} a \tilde{S}_{int} agotamos la libertad de calibre asociada a $H_{\mu a}$ en el modelo original. En el pasaje a S_{TM} agotamos la asociada a $h_{\mu a}$, dejándonos finalmente con la invariancia bajo transformaciones de Lorentz y de difeomorfismos linealizados en $B_{\mu a}$. De hecho puede verse que su parte antisimétrica no aparece en (4.58).

Para ver la relación entre las funciones de partición observemos que \tilde{S}_{int} puede escribirse como

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{int} &= \frac{1}{2} \int d^3x (h_\mu^a - B_\mu^a) \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu \omega_{\lambda a}(h - B) + \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^3x [\varepsilon^{\mu\nu\lambda} B_\mu^a \partial_\nu W_{\lambda a}(B) + \frac{2}{ms} W_\mu^a(B) \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu W_{\lambda a}(B)]. \end{aligned} \quad (4.59)$$

La primera integral en (4.59) corresponde a S_E en el campo $h_\mu^a - B_\mu^a$, la segunda integral es precisamente S_{TM} . Así podemos hacer la integral funcional en $\tilde{h}_{\mu a} \equiv h_{\mu a} - B_{\mu a}$, introduciendo los términos de fijación de calibre que correspondan y quedaría la integral de la TM . Así

$$Z_{\tilde{S}_{int}} \propto Z_{S_{TM}} Z_{S_E}. \quad (4.60)$$

El factor que tiene que ver con la acción de Einstein está en correspondencia con la fijación de calibre que se tuvo que hacer para llegar a la acción $S_{TM}(B)$. En otra dirección \tilde{S}_{int} puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{int} = & \frac{1}{2} \int d^3x [(h_\mu^a + H_\mu^a) \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu \omega_{\lambda a} (h + H) + \frac{ms}{2} (h_\mu^a + H_\mu^a) \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu (h_{\lambda a} + H_{\lambda a}) \\ & + (2B_\mu^a - 2h_\mu^a - H_\mu^a) \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu W_{\lambda a} (H)], \end{aligned} \quad (4.61)$$

donde vemos como que se han "aislado" los términos que tienen que ver con la acción de la TI expresados en función del campo $\tilde{h}_{\mu a} \equiv h_{\mu a} + H_{\mu a}$. Al plantear la integral funcional redefinimos además $\tilde{B}_{\mu a} \equiv 2B_{\mu a} - 2h_{\mu a} - H_{\mu a}$. La integral funcional será la de la acción intermedia por un factor que, al igual que en el caso de la acción BF del caso vectorial, debe ser proporcional al cuadrado de la función de partición de la acción de Einstein. Así

$$Z_{\tilde{S}_{int}} \propto Z_{S_{int}} (Z_{S_E})^2. \quad (4.62)$$

Teniendo en cuenta (4.60) y (4.62) concluimos que

$$Z_{\tilde{S}_{TM}} \propto Z_{S_{int}} Z_{S_E}, \quad (4.63)$$

que relaciona las funciones de partición de las acciones S_{int} y S_{TM} .

4.4 Conclusión

Hemos visto que hay tres modelos asociados a la condición de Pauli-Lubanski con $s = \pm 2$. Uno es el modelo autodual (SD)

$$S_{SD}^\pm = -\frac{ms}{4} \int d^3x h_\mu^a [\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \eta_{ab} \partial_\nu + \frac{ms}{2} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\mu\lambda\rho} \delta_\rho^c] h_\lambda^b, \quad (4.64)$$

el cual no tiene invariancias de calibre. Le sigue el modelo intermedio (TI)

$$S_{int} = \frac{1}{2} \int d^3x [h_\mu^a \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu \omega_{\lambda a} (h) + \frac{ms}{2} h_\mu^a \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu h_{\lambda a}], \quad (4.65)$$

el cual es invariante, salvo un término de borde, bajo las transformaciones de difeomorfismos linealizadas

$$\delta h_\mu^a = \partial_\mu \zeta^a. \quad (4.66)$$

Finalmente está el modelo topológico masivo (TM)

$$S_{TM} = -\frac{1}{2} \int d^3x [\varepsilon^{\mu\nu\lambda} h_{\mu}{}^a \partial_{\nu} \omega_{\lambda a}(h) + \frac{2}{m_S} \omega_{\mu}{}^a(h) \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_{\nu} \omega_{\lambda a}(h)], \quad (4.67)$$

el cual también es invariante bajo difeomorfismos y explícitamente invariante bajo transformaciones de Lorentz $\delta h_{\mu a} = \varepsilon_{\mu a}{}^b l_b$, dado que la parte antisimétrica de $h_{\mu a}$ no aparece en la acción.

Vimos que se puede pasar por una transformación de dualidad del modelo SD al TI incorporando además la invariancia bajo difeomorfismos. De forma análoga se pasa del modelo TI al TM por una transformación de dualidad, y se incorpora también la invariancia Lorentz faltante. Los espacios de soluciones de los modelos SD y TI difieren en las soluciones no triviales de $\omega_{\mu a}(h) = 0$. Estas soluciones corresponden al modelo TCS libre. En el caso de los modelos TI y TM los espacios de soluciones difieren en las soluciones no triviales de $G_{\mu a}(h) = 0$, las cuales están asociadas al modelo no dinámico de Einstein libre.

A nivel de las funciones de partición observamos que estas difieren en factores que están relacionadas con las funciones de partición de los modelos TCS y de Einstein. En particular obtuvimos que

$$Z_{S_{int}} \propto Z_{S_{SD}} Z_{S_{TCS}}, \quad (4.68)$$

$$Z_{S_{TM}} \propto Z_{S_{int}} Z_{S_E}. \quad (4.69)$$

Notamos que el factor en que difieren las acciones está relacionado con la parte del espacio de soluciones en que difieren.

Los cálculos aquí presentados en relación con las funciones de partición se han hecho de forma heurística y merecen ser estudiados de forma rigurosa. En variedades de topología trivial los modelos SD , TI y TM son completamente equivalentes y sus funciones de partición serán iguales.

Capítulo 5

Conclusiones

Siguiendo lineamientos convencionales se obtienen las ecuaciones que deben cumplir los campos que realicen el álgebra del grupo de Poincaré en dimensión 2+1 con spin (o helicidad) entero (no nulo) y masa m . Se muestra como para el caso de $s = 1$ las realizaciones corresponden al modelo masivo autodual y el topológico masivo. Igualmente se muestra que para $s = 2$ las realizaciones corresponden a los modelos: masivo autodual de spin 2, intermedio y topológico masivo linealizado.

Para $s = 1$ se revisa que los modelos están conectados por una transformación de dualidad la cual incorpora la invariancia de calibre no presente en el modelo autodual. Se discute también la relación entre las funciones de partición las cuales difieren en un factor relacionado con la torsión de Ray-Singer de la variedad base.

Para $s = 2$ se muestra que por la vía de transformaciones de dualidad es posible pasar del modelo autodual al intermedio, y a partir de éste último al topológico masivo linealizado. En el primer paso se incorpora la invariancia bajo difeomorfismos linealizada ausente en el modelo autodual. En el segundo paso se incorpora la invariancia bajo transformaciones de Lorentz linealizada no presente en el modelo intermedio. Para estos modelos se encuentra que las funciones de partición difieren en factores asociados a teorías que describen las soluciones no triviales de $\omega_\mu^a(h) = 0$ (en el caso de los modelos autodual e intermedio) o a soluciones no triviales de $G_\mu^a(h) = 0$ (en el caso de los modelos intermedio y topológico masivo linealizado). Cuando miramos los espacios de soluciones de cada par de modelos (autodual-intermedio o intermedio-topológico masivo) estos difieren en las soluciones no triviales antes señaladas. Estos factores que diferencian las funciones de partición cobran importancia a la hora de considerar las teorías acopladas con fuentes externas. Valdría la pena abordar el significado topológico que podrían tener.

27-12-2009: Recientemente se han publicado resultados, independientes, concernientes a la dualidad entre las teorías autodual, intermedia y topológica masiva desde un enfoque mas completo de la función de partición[26].

Apéndice A

Convenciones para gravedad curva y linealizada

A.1 Transformaciones bajo difeomorfismos

Las transformaciones generales de coordenadas

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu - \zeta^\mu(x), \quad (\text{A.1})$$

inducen en un tensor p covariante, q contravariante, el cambio

$$\begin{aligned} \delta T_{\nu_1 - \nu_p}^{\mu_1 - \mu_q} &= \zeta^\rho \partial_\rho T_{\nu_1 - \nu_p}^{\mu_1 - \mu_q} + \partial_{\nu_1} \zeta^\rho T_{\rho \nu_2 - \nu_p}^{\mu_1 - \mu_q} + \\ &+ \partial_{\nu_2} \zeta^\rho T_{\nu_1 \rho \nu_3 - \nu_p}^{\mu_1 - \mu_q} + \dots \\ &- \partial_\rho \zeta^{\mu_1} T_{\nu_1 - \nu_p}^{\rho \mu_2 - \mu_q} - \partial_\rho \zeta^{\mu_2} T_{\nu_1 - \nu_p}^{\mu_1 \rho - \mu_q} - \dots, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

A.2 Derivadas covariantes, conexiones, tensores de Riemman, Ricci, Einstein, Cotton, Torsión

Las derivadas covariantes mantienen el caracter del objeto sobre el cual actúan. Sobre vectores covariantes y contravariantes actúan como

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \mathcal{U}_\nu &= \partial_\mu \mathcal{U}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \mathcal{U}_\lambda, \quad (\text{a}) \\ \mathcal{D}_\mu \mathcal{V}^\nu &= \partial_\mu \mathcal{V}^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \mathcal{V}^\lambda. \quad (\text{b}) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Sobre un tensor 2 covariante actúa así

$$\mathcal{D}_\mu A_{\nu\lambda} = \partial_\mu A_{\nu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho A_{\rho\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho A_{\nu\rho}. \quad (\text{A.4})$$

La generalización es inmediata para un tensor mixto.

La conexión $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ no es un buen tensor bajo difeomorfismos, sin embargo la torsión si lo es

$$T_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda. \quad (\text{A.5})$$

El *tensor de Riemman* se define por el conmutador de las derivadas covariantes

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]V^\lambda = R_{\mu\nu\sigma}^\lambda V^\sigma - T_{\mu\nu}^\sigma \mathcal{D}_\sigma V^\lambda, \quad (\text{A.6})$$

donde

$$R_{\mu\nu\sigma}^\lambda = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}^\rho. \quad (\text{A.7})$$

Cuando la torsión es cero (se dice que el espacio es de Riemman) se obtiene que

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (\text{A.8})$$

Las identidades de Jacobi para los conmutadores nos llevan a las identidades

$$\mathcal{D}_\rho R_{\mu\nu\sigma}^\lambda + T_{\mu\nu}^\gamma R_{\gamma\rho\sigma}^\lambda + (\text{permutaciones cíclicas en } \rho\mu\nu) = 0. \quad (\text{a})$$

$$R_{\mu\nu\rho}^\lambda - \mathcal{D}_\rho T_{\mu\nu}^\gamma - T_{\mu\nu}^\sigma T_{\sigma\rho}^\lambda + (\text{permutaciones cíclicas en } \rho\mu\nu) = 0. \quad (\text{b}) \quad (\text{A.9})$$

El *tensor de Ricci* se define por la contracción

$$R_{\mu\nu} = R_{\lambda\mu\nu}^\lambda = R_{\nu\mu}, \quad (\text{A.10})$$

y el *escalar de curvatura* se define haciendo otra contracción

$$R = R_\mu^\mu. \quad (\text{A.11})$$

Con $R_{\mu\nu}$ y R se define el tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (\text{A.12})$$

el cual cumple, en virtud de (A.9)

$$\mathcal{D}_\mu G_\nu^\mu = 0 \quad (\text{A.13})$$

En $d = 2 + 1$ sucede que los tensores de Einstein y Riemman tienen el mismo número de componentes independientes. Así que uno puede expresarse en función del otro

$$R_{\mu\nu\lambda}^\sigma = -\varepsilon_{\mu\nu\rho} \varepsilon_{\gamma\lambda}^\sigma G^{\rho\lambda} \quad (\text{A.14})$$

y no se tiene tensor de Weyl. En su lugar se usa el tensor de Cotton

$$C^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\rho\lambda} \mathcal{D}_\rho \tilde{R}_\lambda^\nu \quad (\text{A.15})$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{R}_\mu^\nu &= G_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu G, & (\text{a}) \\ &= R_\mu^\nu - \frac{1}{4} g_\mu^\nu R. & (\text{b}) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

A.3 El lenguaje de las tríadas y los objetos asociados

Al remitirnos al espacio tangente se introducen los vielbeins e^a las cuales tiene componentes e_μ^a . Sus duales tienen componentes e^μ_a . Así

$$e_\mu^a e^\mu_b = \delta_b^a. \quad (\text{A.17})$$

Nos referimos a índices de universo con letras griegas y a los del espacio tangente con las primeras letras del alfabeto.

En el espacio tangente las transformaciones que preservan el producto $U_a V^a$ son:

$$\delta V^a = V^b X_b^a \quad ; \quad \delta U_a = -X_a^b U_b, \quad (\text{A.18})$$

y se introducen las derivadas covariantes asociadas a estas transformaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu U_a &= \partial_\mu U_a - \omega_{\mu a}^b U_b, & (\text{a}) \\ \mathcal{D}_\mu V^a &= \partial_\mu V^a + V^b \omega_{\mu b}^a, & (\text{b}) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

con $\omega_{\mu a}^b$, la *conexión de spin*, que transforma como

$$\delta \omega_{\mu a}^b = -\mathcal{D}_\mu X_a^b. \quad (\text{A.20})$$

Para objetos, mixtos como la tríada, la derivada covariante total es

$$\mathcal{D}_\mu e_\nu^a = \mathcal{D}_\mu e_\nu^a - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^a. \quad (\text{A.21})$$

Así al igual que pedimos que $\mathcal{D}_\mu g_{\lambda\rho} = 0$, si pedimos que $\mathcal{D}_\mu e_\nu^a = 0$ tendremos que

$$\mathcal{D}_\mu e_\nu^a = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^a, \quad (\text{A.22})$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda{}^a &= (\mathcal{D}_\mu e_\nu{}^a - \mathcal{D}_\nu e_\mu{}^a), \\ &\equiv T_{\mu\nu}{}^a. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Nos referiremos indistintamente a $T_{\mu\nu}{}^a$ como la torsión.

En 2 + 1 dimensiones, dado que $\omega_\mu{}^{ab} = -\omega_\mu{}^{ba}$, introducimos la conexión de spin dual

$$\omega_\mu{}^a \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{abc} \omega_{\mu bc}. \quad (\text{A.24})$$

De esto (A.19) se expresa como

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu U_a &= \partial_\mu U_a - \varepsilon_{ab}{}^c \omega_\mu{}^b U_c, & (\text{a}) \\ \mathcal{D}_\mu V^a &= \partial_\mu V^a - \varepsilon^a{}_{bc} \omega_\mu{}^b V^c. & (\text{b}) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

El conmutador de derivadas covariantes nos permite introducir al análogo del tensor de curvatura

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] V^a = V^b R_{\mu\nu b}{}^a, \quad (\text{A.26})$$

con

$$R_{\mu\nu b}{}^a = \partial_\mu \omega_{\nu b}{}^a - \partial_\nu \omega_{\mu b}{}^a + \omega_{\nu a}{}^c \omega_{\mu c}{}^b - \omega_\nu{}^{bc} \omega_{\mu ca}. \quad (\text{A.27})$$

Resulta que $R_{\mu\nu}{}^{ab} = -R_{\mu\nu}{}^{ba}$ y en 2 + 1 introducimos

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^*{}^a &= \frac{1}{2} \varepsilon^a{}_{bc} R_{\mu\nu}{}^{bc}, \\ &= \partial_\mu \omega_\nu{}^a - \partial_\nu \omega_\mu{}^a - \varepsilon^a{}_{bc} \omega_\mu{}^b \omega_\nu{}^c. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

También sucede que $R_{\mu\nu}^*{}^a = -R_{\nu\mu}^*{}^a$, así que podemos introducir su dual

$$\begin{aligned} R^{**\mu a} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} R_{\nu\lambda}^*{}^a, & (\text{a}) \\ &= \frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \varepsilon^{abc} R_{\nu\lambda bc}. & (\text{b}) \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Resulta que

$$R_{\mu\nu\lambda}{}^\sigma = R_{\mu\nu a}{}^b e_\lambda{}^a e^\sigma{}_b, \quad (\text{A.30})$$

$$R^{**\mu a} = -e G^{\mu\nu} e_\nu{}^a, \quad (\text{A.31})$$

con

$$e = -\frac{1}{3!}\varepsilon_{abc}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}e_\mu{}^ae_\nu{}^be_\lambda{}^c, \quad (\text{A.32})$$

el determinante de la tríada. Las identidades de Bianchi que surgen de las identidades de Jacobi para los conmutadores son

$$\mathcal{D}_\mu R_{\nu\lambda}^{*a} + (\text{permutaciones cíclicas en } \mu\nu\lambda) = 0,$$

de donde

$$\mathcal{D}_\mu R^{**\mu a} = 0.$$

En otra dirección la ecuación de $T_{\mu\nu}{}^a = 0$ permite despejar la conexión en función de la tríada

$$e\omega_\mu{}^a = (e_{\mu b}e_\rho{}^a - \frac{1}{2}e_\mu{}^ae_{\rho b})\varepsilon^{\rho\nu\lambda}\partial_\nu e_\lambda{}^b \quad (\text{A.33})$$

A.4 Transformaciones de calibre en el lenguaje de las tríadas

La transformación de la conexión de torsión nula se relaciona con la de la tríada partiendo de (A.33)

$$e\delta\omega_\mu{}^a = (e_{\mu b}e_\rho{}^a - \frac{1}{2}e_\mu{}^ae_{\rho b})\varepsilon^{\rho\nu\lambda}\mathcal{D}_\nu\delta e_\lambda{}^b.$$

Para los distintos tipos de invariancia tendremos

Lorentz:

$$\begin{aligned} \delta e_\mu{}^a &= -X^a{}_b e_\mu{}^b, & (\text{a}) \\ &\equiv \varepsilon^a{}_{bc} l^b e_\mu{}^c, & (\text{b}) \\ \delta\omega_\mu{}^a &= -\mathcal{D}_\mu l^a. & (\text{c}) \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Difeomorfismo:

$$\begin{aligned} \delta e_\mu{}^a &= \zeta^\nu \partial_\nu e_\mu{}^a + (\partial_\mu \zeta^\nu) e_\nu{}^a, & (\text{a}) \\ \delta\omega_\mu{}^a &= \zeta^\nu \partial_\nu \omega_\mu{}^a + (\partial_\mu \zeta^\nu) \omega_\nu{}^a. & (\text{b}) \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Estos últimos pueden reescribirse como

$$\begin{aligned}
\delta e_\mu^a &= \zeta^\nu T_{\mu\nu}^a + \mathcal{D}_\nu \zeta^a - \varepsilon^a_{bc} l_\zeta^b e_\mu^c, & (a) \\
\delta \omega_\mu^a &= -\mathcal{D}_\nu l_\zeta^a + \zeta^\nu R_{\mu\nu}^{*a}. & (b)
\end{aligned} \tag{A.36}$$

con

$$\begin{aligned}
\zeta^a &= \zeta^\nu e_\nu^a, & (a) \\
l_\zeta^a &= -\zeta^\nu \omega_\mu^a. & (b)
\end{aligned} \tag{A.37}$$

Transformaciones “conformes”:

$$\begin{aligned}
\delta e_\mu^a &= \frac{1}{2} \rho e_\mu^a & (a) \\
e \delta \omega_\mu^a &= \frac{1}{2} e_\lambda^a \varepsilon_\mu^{\lambda\sigma} \partial_\sigma \rho. & (b)
\end{aligned} \tag{A.38}$$

A.5 Objetos involucrados y definiciones en la formulación linealizada

Linealizamos tomando

$$e_\mu^a = \delta_\mu^a + k h_\mu^a + O(k^2), \tag{A.39}$$

así $e = 1 + k h_\mu^a \delta_a^\mu + O(k^2)$, y observamos en (A.33) que ω_μ^a es de orden k . De hecho obtenemos

$$\begin{aligned}
\omega_\mu^{L^a}(h) &= (\eta_{\mu b} \delta_\rho^a - \frac{1}{2} \delta_\mu^a \eta_{\rho b}) \varepsilon^{\rho\nu\lambda} \partial_\nu h_\lambda^b, & (a) \\
&\equiv [W_\mu^a]^\lambda_b h_\lambda^b, & (b) \\
&\equiv W_\mu^a(h). & (c)
\end{aligned} \tag{A.40}$$

(A.40a) puede escribirse, de forma mas sugestiva como,

$$\omega_\mu^{L^a}(h) = \frac{1}{2} \delta_\lambda^a \varepsilon^{\lambda\nu\gamma} [\partial_\nu (h_{\mu\gamma} + h_{\gamma\mu}) - \partial_\mu h_{\nu\gamma}], \tag{A.41}$$

Luego con (A.31) obtendremos

$$\begin{aligned}
G^{L\mu\nu}(h) &= -\varepsilon^{\nu\rho\sigma} \partial_\rho \omega_\sigma^c(h) \delta_c^\mu, & (a) \\
&= -\varepsilon^{\mu\alpha\rho} \varepsilon^{\nu\beta\sigma} \partial_\alpha \partial_\beta h_{\rho\sigma}, & (b) \\
&= -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\alpha\rho} \varepsilon^{\nu\beta\sigma} \partial_\alpha \partial_\beta (h_{\rho\sigma} + h_{\sigma\rho}), & (c)
\end{aligned} \tag{A.42}$$

de donde vemos que $G^{L\mu\nu} = G^{L\nu\mu}$ y que $\partial_\mu G^{L\mu\nu} = 0$. De la definición de $\tilde{R}^{\mu\nu}$, éste adquiere la forma

$$\begin{aligned}\tilde{R}^{L\mu\nu} &= G^{L\nu\mu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}G^L, \\ &= -(\delta_c^\mu\delta_\lambda^\nu - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta_{\lambda c})\varepsilon^{\lambda\rho\sigma}\partial_\rho\omega_\sigma^c(h),\end{aligned}\tag{A.43}$$

cuya forma recuerda a (A.40a). Así podremos reescribirlo como

$$\tilde{R}^{L\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\nu\rho\sigma}[\partial_\rho(\omega_\sigma^\mu + \omega_\sigma^\mu) - \partial^\mu\omega_{\rho\sigma}].\tag{A.44}$$

Por tanto el tensor de Cotton queda como

$$C^{L\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\rho}\varepsilon^{\mu\beta\sigma}\partial_\alpha\partial_\beta(\omega_{\rho\sigma}(h) + \omega_{\sigma\rho}(h)).\tag{A.45}$$

Esta similitud en las expresiones de ω_μ^{La} , $G^{L\mu\nu}$ y $R^{L\mu\nu}$ en función de h_μ^a y ω_μ^a va a ser importante cuando miremos las realizaciones del álgebra de Poincaré.

A.6 Transformaciones a nivel linealizado

Considerando el proceso de linealización tendremos que para las transformaciones bajo difeomorfismos infinitesimales

$$\delta_\zeta h_\mu^a = \partial_\mu \zeta^a,\tag{A.46}$$

y de (A.40) es claro que (asumimos $T_{\mu\nu}^a = 0$)

$$\delta_\zeta \omega_\mu^{La} = 0\tag{A.47}$$

Análogamente para transformaciones infinitesimales de Lorentz sucede de (A.34) y (A.40)

$$\begin{aligned}\delta_l h_\mu^a &= \varepsilon^a_{bc} l^b \delta_\mu^c, \\ &= -\varepsilon_{\mu c}^a l^c, \quad (a) \\ \delta_l \omega_\mu^a &= -\partial_\mu l^a \quad (b)\end{aligned}\tag{A.48}$$

Así cuando un objeto, como $G^{L\mu\nu}$, depende de solamente de la parte simétrica de h_μ^a diremos que es explícitamente invariante bajo transformaciones de Lorentz. De hecho $G^{L\mu\nu}$ es invariante bajo los cambios

$$\delta h_{\mu\nu} = \delta_\mu \zeta_\nu - \varepsilon_{\mu\nu\lambda} l^\lambda, \quad (\text{A.49})$$

el primer término es una transformación de difeomorfismo y el segundo una transformación de Lorentz.

Finalmente para transformaciones conformes tendremos:

$$\begin{aligned} \delta_\rho h_\mu{}^a &= \frac{1}{2} \rho \delta_\mu^a, \\ \delta_\rho \omega_\mu^{La} &= \frac{1}{2} \varepsilon_\mu{}^{\nu\sigma} \partial_\sigma \rho \delta_\nu^a. \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Observamos que un objeto que dependa de la parte simétrica de ω_μ^{La} es explícitamente invariante bajo transformaciones conformes, como es el caso del tensor de Cotton linealizado.

A.7 Descomposición en partes irreducibles en la formulación linealizada

Introduciendo los objetos

$$\begin{aligned} \rho_\mu &= \frac{\partial_\mu}{\square^{1/2}} & (\text{a}) \\ \text{y } P_\nu^\mu &= \delta_\nu^\mu - \rho^\mu \rho_\nu & (\text{b}) \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Descomponemos al tensor $h_{\mu\nu}$ (asociado a la linealización de la tríada):

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= (H_{\mu\nu}^{Tt} + \frac{1}{2} P_{\mu\nu} H^T + \rho_\mu \rho_\nu H^L + \rho_\mu h_\nu^T + \rho_\nu h_\mu^T) + \\ &\quad + (\varepsilon_{\mu\nu\lambda} V^{T\lambda} + \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \rho^\lambda V^L), & (\text{a}) \quad (\text{A.52}) \\ &\equiv h_{\mu\nu}^S + h_{\mu\nu}^A, & (\text{b}) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^S &= h_{\nu\mu}^S, & (\text{a}) \\ h_{\mu\nu}^A &= -h_{\nu\mu}^A, & (\text{b}) \\ H_\mu^{Tt\mu} &= 0, \quad \partial_\mu H_\nu^{Tt\mu} = 0, & (\text{c}) \quad (\text{A.53}) \\ \partial_\mu h^{T\mu} &= 0, & (\text{d}) \\ \partial_\mu V^{T\mu} &= 0. & (\text{e}) \end{aligned}$$

(A.54)

Una descomposición análoga se puede realizar sobre $\omega_\mu^a (= \eta^{a\nu} \omega_{\mu\nu})$

$$\begin{aligned}\omega_{\mu\nu} &= (W_{\mu\nu}^{Tt} + \frac{1}{2}P_{\mu\nu}W^T + \rho_\mu\rho_\nu W^L + \rho_\mu W_\nu^T + \rho_\nu W_\mu^T) + \\ &\quad + (\varepsilon_{\mu\nu\lambda}a^{T\lambda} + \varepsilon_{\mu\nu\lambda}\rho^\lambda a^L), \quad (a) \\ &= \omega_{\mu\nu}^S + \omega_{\mu\nu}^A. \quad (b)\end{aligned}$$

En función de las componentes irreducibles de $h_{\mu\nu}$ se tiene que

$$\begin{aligned}W_{\mu\nu}^{Tt} &= \varepsilon_\mu^{\sigma\lambda} \partial_\sigma H_{\lambda\sigma}^{Tt}, \quad (a) \\ \omega_\mu^T &= \frac{1}{2} \varepsilon_\mu^{\sigma\lambda} \partial_\sigma (h_\lambda^T + \varepsilon_\lambda^{\gamma\theta} \rho_\gamma V_\theta^T), \quad (b) \\ W^T &= 0, \quad (c) \\ W^L &= \square^{1/2} V^L, \quad (d) \\ a_\mu^T &= -\frac{1}{2} \square^{1/2} (h_\mu^T + \varepsilon_\mu^{\lambda\sigma} \rho_\lambda V_\sigma^T), \quad (e) \\ a^L &= \frac{1}{2} \square^{1/2} H^T, \quad (f)\end{aligned} \tag{A.55}$$

Bajo difeomorfismos sucede que $H_{\mu\nu}^{Tt}$, H^T y V^L son invariantes, así como la combinación $B_\mu^T = h_\mu^T + \varepsilon_\mu^{\alpha\beta} \rho_\alpha V_\beta^T$. Se ve entonces de la expresión (A.55) que $\delta_\zeta \omega_{\mu\nu} = 0$.

Las transformaciones de Lorentz, como dijimos, sólo afectan la parte antisimétrica de $h_{\mu\nu}$ ($\delta_l V_\mu^T = -l_\mu^T$, $\delta V^L = -l^L$, si $l_\mu = l_\mu^T + \rho_\mu l^L$).

Para $\omega_{\mu\nu}$, las transformaciones de Lorentz solo afectan a W_μ^T , W^L y a_μ^T

$$\begin{aligned}\delta W_\mu^T &= -\frac{1}{2} \square^{1/2} l_\mu^T, \quad (a) \\ \delta W^L &= -\square^{1/2} l^L, \quad (b) \\ \delta a_\mu^T &= \frac{1}{2} \varepsilon_\mu^{\alpha\beta} \partial_\alpha l_\beta^T, \quad (c) \\ \delta W_{\mu\nu}^{Tt} &= \delta W^T = \delta a^L = 0, \quad (d)\end{aligned} \tag{A.56}$$

en analogía con las transformaciones bajo difeomorfismos del $h_{\mu\nu}$.

La expresión de $G^{L\mu\nu}$ en función de las partes irreducibles de $h_{\mu\nu}$ es

$$G_{\mu\nu}^L = -\square (H_{\mu\nu}^{Tt} - \frac{1}{2} P_{\mu\nu} H^T), \tag{A.57}$$

quedando explícita la invariancia bajo difeomorfismos y transformaciones de Lorentz del tensor de Einstein linealizado.

Para las transformaciones conformes sucede que

$$\begin{aligned}\delta H_{\mu\nu}^{Tt} &= \delta h_\mu^T = \delta h_{\mu\nu}^a = 0 & (a) \\ \delta H^T &= \rho \quad ; \quad \delta H^L = \frac{1}{2}\rho & (b)\end{aligned}\tag{A.58}$$

$$\begin{aligned}\delta a^T &= -\frac{1}{2}\square^{1/2}\rho, & (a) \\ \delta\omega_{\mu\nu}^S &= \delta a_\mu^T = 0. & (b)\end{aligned}\tag{A.59}$$

El tensor de Cotton puede verse que es explícitamente invariante bajo difeomorfismos, transformaciones de Lorentz y conformes. Su expresión en función de las partes irreducibles de $h_{\mu\nu}$ es

$$C^{\mu\nu} = -\square\varepsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha H_\beta^{Tt\nu}.\tag{A.60}$$

A.8 Tensores relevantes en función de solamente las componentes irreducibles de spin 2

En la descomposición del $h_{\mu\nu}$ distinguimos las componentes de spin 2 $H_{\mu\nu}^{Tt}$; las de spin 1: h_μ^T, V_μ^T ; y las de spin 0: H^T, H^L, V^L . Una teoría que describa a una partícula con spin 2 masiva debe proporcionar las restricciones dinámicas para que las componentes asociadas a los spines menores (1 y 0) se anulen. Siendo así el caso se tendrá

$$h_{\mu\nu} = H_{\mu\nu}^{Tt},\tag{A.61}$$

luego de (A.55),(A.57) y (A.60)

$$\begin{aligned}\omega_{\mu\nu}(h^{Tt}) &= W_{\mu\nu}^{Tt}(h^{Tt}), & (a) \\ &= \varepsilon_\mu^{\sigma\lambda}\partial_\sigma H_{\lambda\nu}^{Tt}, & (b)\end{aligned}\tag{A.62}$$

$$G_{\mu\nu}(h^{Tt}) = -\square H_{\mu\nu}^{Tt},\tag{A.63}$$

$$\begin{aligned}C_{\mu\nu}(h^{Tt}) &= -\square W_{\mu\nu}^{Tt}(h^{Tt}), & (a) \\ &= -\square\varepsilon_\mu^{\sigma\lambda}\partial_\sigma H_{\lambda\nu}^{Tt}. & (b)\end{aligned}\tag{A.64}$$

Estas últimas relaciones se hacen presentes cuando miramos la realización de la condición de Pauli-Lubansky para spin 2 donde, en el caso de la teoría autodual, la variable fundamental es $h_{\mu\nu}$, para la teoría intermedia, es $\omega_{\mu\nu}(h)$, y para la teoría topológica masiva linealizada, es $G_{\mu\nu}(h)$.

Bibliografía

- [1] D. J. Gross, R. D. Pisarski and L. G. Yaffe, “QCD And Instantons At Finite Temperature,” *Rev. Mod. Phys.* **53**, 43 (1981).
- [2] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, “Topologically massive gauge theories,” *Annals Phys.* **140**, 372 (1982) [Erratum-ibid. **185**, 406.1988 APNYA,281,409 (1988 APNYA,281,409-449.2000)].
- [3] P. K. Townsend, K. Pilch and P. van Nieuwenhuizen, “Selfduality In Odd Dimensions,” *Phys. Lett.* **136B**, 38 (1984) [Addendum-ibid. **137B**, 443 (1984)].
- [4] S. Deser and R. Jackiw, “‘Selfduality’ Of Topologically Massive Gauge Theories,” *Phys. Lett. B* **139**, 371 (1984).
- [5] C. Aragone and A. Khoudeir, “SELFDUAL MASSIVE GRAVITY,” *Phys. Lett. B* **173**, 141 (1986); “DYNAMICS OF SELFDUAL MASSIVE GRAVITY” *IN *SANTIAGO 1985, PROCEEDINGS, QUANTUM MECHANICS OF FUNDAMENTAL SYSTEMS 1* 17-26*.
- [6] S. Deser and J. G. McCarthy, “Selfdual formulations of D=3 gravity theories,” *Phys. Lett. B* **246**, 441 (1990) [Addendum-ibid. *B* **248**, 473 (1990)].
- [7] C. Aragone and A. Khoudeir, “Selfdual spin 3 and 4 theories,” arXiv:hep-th/9307004; C. Aragone, P. J. Arias and A. Khoudeir, “Einstein-Chern-Simons massive systems and selfdual spin 3” *In *Cocoyoc 1990, Proceedings, Relativity and gravitation: Classical and quantum* 437-444. (see HIGH ENERGY PHYSICS INDEX 29 (1991) No. 16472)*
- [8] P. J. Arias and J. Stephany, “Gauge invariance and second class constraints in 3-D linearized massive gravity,” *J. Math. Phys.* **36**, 1868 (1995) [arXiv:hep-th/9406092].
- [9] S. Weinberg, *The quantum theory of fields*, Cambridge University Press (1995), Vol 1, Chap. 2.
- [10] R. Jackiw and V. P. Nair, “Relativistic wave equations for anyons,” *Phys. Rev. D* **43**, 1933 (1991).

- [11] B. Binengar, “Relativistic Field Theories In Three-Dimensions,” J. Math. Phys. **23**, 1511 (1982).
- [12] M. A. Vasiliev, “Higher-spin gauge theories in four, three and two dimensions,” Int. J. Mod. Phys. D **5**, 763 (1996) [arXiv:hep-th/9611024]; I. V. Tyutin and M. A. Vasiliev, “Lagrangian formulation of irreducible massive fields of arbitrary spin in (2+1) dimensions,” Theor. Math. Phys. **113**, 1244 (1997) [arXiv:hep-th/9704132].
- [13] J. Stephany, “On topological field theories and duality,” Phys. Lett. B **390**, 128 (1997) [arXiv:hep-th/9605074].
- [14] T. H. Buscher, “Path Integral Derivation of Quantum Duality in Nonlinear Sigma Models,” Phys. Lett. B **201**, 466 (1988); “A Symmetry of the String Background Field Equations,” Phys. Lett. B **194**, 59 (1987).
- [15] H. O. Girotti, “Canonical quantization of the self-dual model coupled to fermions,” Int. J. Mod. Phys. A **14**, 2495 (1999) [arXiv:hep-th/9803153].
- [16] P. J. Arias and M. A. Garcia-Nustes, “Covariance of the selfdual vector model. (In Spanish),” Rev. Mex. Fis. **52S3**, 95 (2006) [arXiv:hep-th/0410219].
- [17] P. J. Arias, *Spin 2 en dimensión 2 + 1*, Tesis de Doctorado (1994) (USB) [arXiv:gr-qc/9803083].
- [18] M. Blau and G. Thompson, “A New Class Of Topological Field Theories And The Ray-Singer Torsion,” Phys. Lett. B **228**, 64 (1989) ; “Topological Gauge Theories of Antisymmetric Tensor Fields,” Annals Phys. **205**, 130 (1991).
- [19] P. J. Arias and A. Restuccia, “Topological sectors of spin 1 theories in (2+1)-dimensions,” Phys. Lett. B **347**, 241 (1995) [arXiv:hep-th/9410134].
- [20] E. M. Prodanov and S. Sen, “Equivalence of the self-dual model and Maxwell-Chern-Simons theory on arbitrary manifolds,” Phys. Rev. D **59**, 065019 (1999) [Erratum-ibid. D **66**, 089902 (2002)] [arXiv:hep-th/9801026].
- [21] R. Gianvittorio, A. Restuccia and J. Stephany, “On the quantization of field theories with second class constraints,” Mod. Phys. Lett. A **6**, 2121 (1991).
- [22] P. J. Arias and R. Gaitan D., “Selfdual spin 2 in 2+1 dimensions revisited. (In Spanish),” Rev. Mex. Fis. **52S3**, 140 (2006) [arXiv:hep-th/0401107].
- [23] C. Aragone, P. J. Arias and A. Khoudeir, “Massive vector Chern-Simons gravity,” Nuovo Cim. B **109**, 303 (1994) [arXiv:hep-th/9307003].
- [24] P.J.Arias, *Duality between spin 2 theories in 2+1 dimensions*, presentado en el IX Marcell Grossman Meeting. Roma, julio 2000.

-
- [25] M. I. Caicedo and A. Restuccia, “New topological aspects of BF theories,” *Class. Quant. Grav.* **15**, 3749 (1998) [arXiv:hep-th/9803017].
- [26] D. Dalmazi and E. L. Mendonca, “Dual descriptions of spin two massive particles in $D = 2 + 1$ via master Phys. Rev. D **79**, 045025 (2009) [arXiv:0812.0161 [hep-th]].